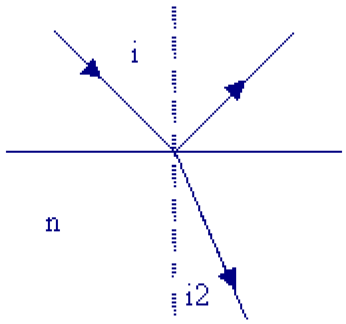
L'arc-en-ciel

par Gilbert Gastebois

1. La réfraction



Loi de Descartes : sin i = n sin i_2 (cf : réfraction)

Coefficient de réflexion R   (cf : réfraction)

La lumière se décompose en deux polarisations parallèle et orthogonale au plan d'incidence.
Le coefficient de réflexion parallèle R_p vaut $\tan^2 (i - i_2)/\tan^2 (i + i_2)$
Le coefficient de réflexion orthogonale R_o vaut $\sin^2 (i - i_2)/\sin^2 (i + i_2)$
$\mathbf{R = 0,5 (R_o + R_p) = 0,5 (\sin^2 (i - i_2)/\sin^2 (i + i_2) + \tan^2 (i - i_2)/\tan^2 (i + i_2))}$

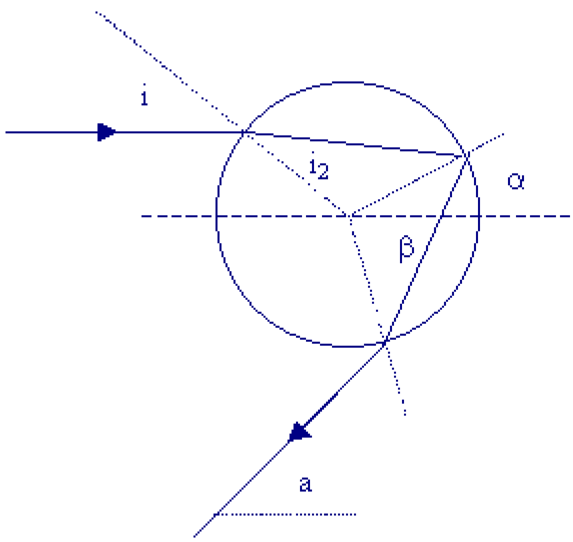
Dispersion de la lumière

L'indice de réfraction n de l'eau dépend de la longueur d'onde de la lumière λ

n = 1,324 + 3100/ λ² (λ en nm) $1,330 < n < 1,343$

2. L'arc principal

2.1 Schéma



2.2 Angle de sortie a

$\alpha = 180 - i - (180 - 2\, i_2) = 2\, i_2 - i$

$\beta = (180 - 2\, i_2) - \alpha = 180 - 4\, i_2 + i$

$a = 90 - (i - (90 - \beta)) = 90 - i + 90 - 180 - i + 4\, i_2 = -i - i + 4\, i_2$

$\mathbf{a = 4\, i_2 - 2\, i}$

$i_2 = \arcsin(\sin i / n)$

$a = 4 \arcsin(\sin i / n) - 2i$

cette fonction passe par un maximum quand $da/di = 0$

$da/di = 4 \cos i / n / (1 - \sin^2 i / n^2)^{1/2} - 2 = 2\,(2\,(1 - \sin^2 i)^{1/2} / n / (1 - \sin^2 i / n^2)^{1/2} - 1)$

$da/di = 2\,(2\,(1 - \sin^2 i)^{1/2} / (n^2 - \sin^2 i)^{1/2} - 1)$

cette valeur s'annule quand

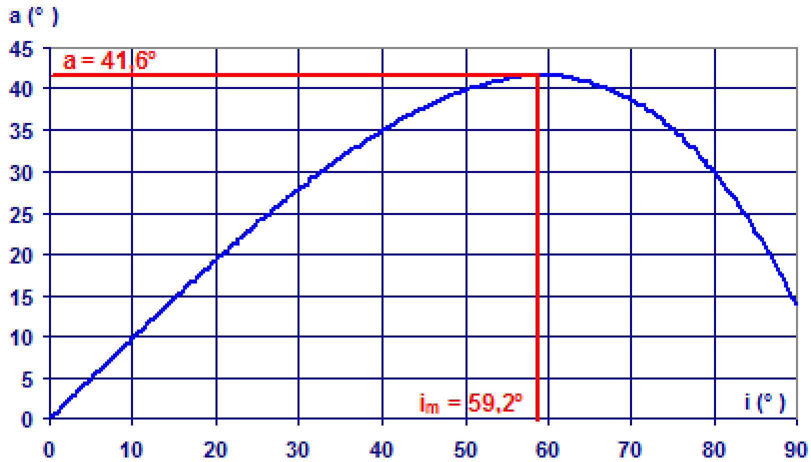
$(1 - \sin^2 i_m)^{1/2} / (n^2 - \sin^2 i_m)^{1/2} = 1/2$ ou $(1 - \sin^2 i_m) / (n^2 - \sin^2 i_m) = 1/4$ donc

$4 = n^2 + 3 \sin^2 i_m$

$\mathbf{\sin i_m = ((4 - n^2)/3)^{1/2}}$

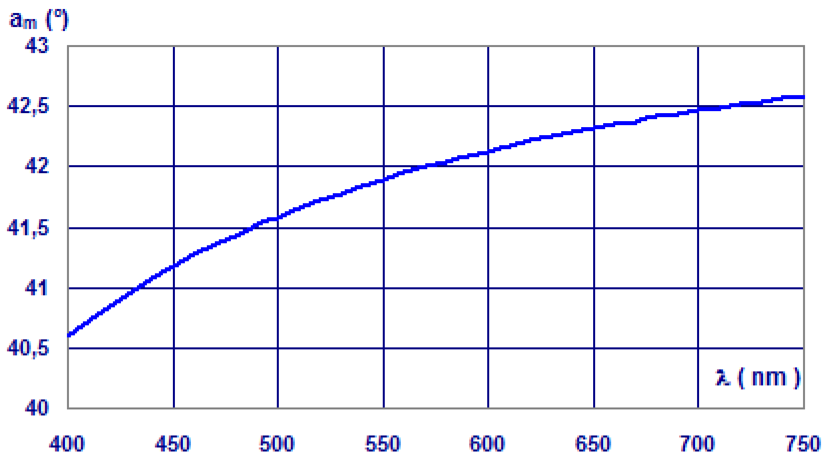
Exemple : pour $\lambda = 500$ nm, $n = 1{,}336$ et $i_m = 59{,}2°$ et $a_m = 41{,}6°$

Courbe a = f(i) (λ = 500 nm)



La courbe passe par un maximum pour i = 59,2 ° (pour λ = 500 nm), c'est pour cet angle que l'on a l'arc-en-ciel.

Courbe $a_m = f(\lambda)$



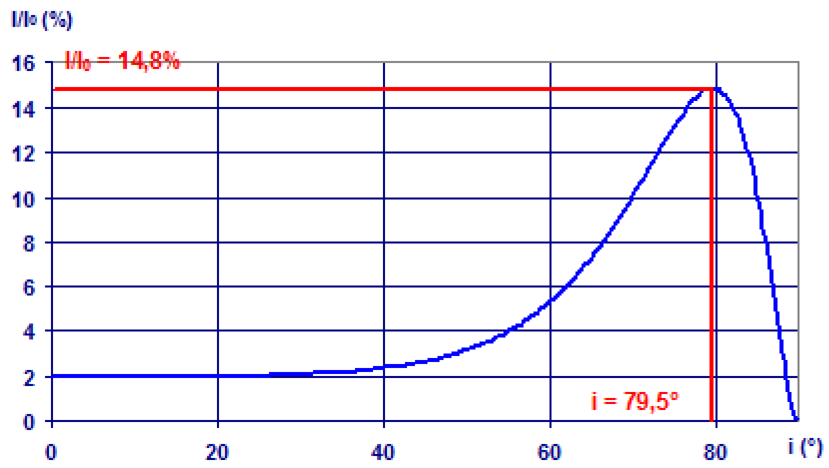
L'angle de sortie a_m augmente avec λ. Le rouge est donc au dessus de l'arc et le violet en dessous.

2.3 Intensité de sortie

La lumière pénètre dans la goutte (1 - R), se réfléchit (R), sort de la goutte (1 - R).

donc
$$\mathbf{I/I_0 = R(1 - R)^2}$$

Courbe $I/I_0 = f(i)$ (λ = 500 nm)

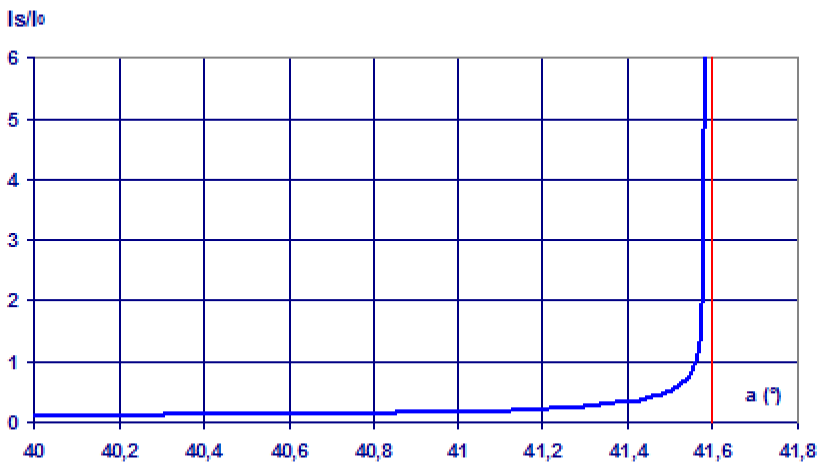


La courbe passe par un maximum pour i = 79,5° (pour λ = 500 nm), mais ce n'est pas pour cet angle que l'on a l'arc-en-ciel principal

2.4 Intensité de l'arc-en-ciel

L'observateur reçoit la lumière émise dans un petit angle autour de chaque direction de l'espace. Il faut donc calculer l'intensité lumineuse par degré I_s en fonction de l'angle de sortie a.
L'intensité qui sort dans un angle da est celle (I_0) qui est entrée dans un angle di (multipliée par le facteur de transmission $k = R(1 - R)^2$)
$Is\ da = k\ I_0\ di$
$Is = k\ I_0\ di/da = k\ I_0 /(da/di)$
$$\mathbf{Is = k\ I_0 /(4\ (1 - \sin^2 i)^{1/2}/(n^2 - \sin^2 i)^{1/2} - 2)}$$

Courbe $I_s = f(a)$ ($\lambda = 500$ nm)



La courbe atteint un maximum très pointu pour $a_m = 41{,}6°$ (pour $\lambda = 500$ nm), c'est la raison pour laquelle on ne voit l'arc-en-ciel que dans une direction bien particulière. L'angle a_m dépend de λ, on voit donc le spectre du soleil se former entre 40,6° et 42,6°
Il n'y a aucune lumière au dessus de l'arc puisque la courbe s'arrête à a_m et comme c'est le contraire pour l'arc secondaire (pas de lumière au dessous), l'arrière-plan est parfaitement net entre les deux arcs principal et secondaire, cela donne une impression d'obscurité entre les deux arcs. Cette zone a été appelée bande sombre d'Alexandre. (Rien à voir avec Alexandre le grand...)

2.5 Allure de la courbe au voisinage de $a = a_m$

On pose $x = i - i_m$ (x petit)
$Is = k I_0 /(4 (1 - \sin^2(i_m + x))^{1/2}/(n^2 - \sin^2(i_m + x))^{1/2} - 2)$
On fait un développement limité et on obtient :
$Is = k I_0 /(2 (n^2 - 1) \tan i_m/(n^2 - \sin^2 i_m) \ x) = 2 k I_0 /(3((4 - n^2)/(n^2 - 1))^{1/2} \ x) = 0{,}02 I_0 /x$
$\mathbf{Is = 0{,}02 I_0 /(| i - i_m|)}$

Si $i = i_m$, Is tend vers l'infini. En réalité Is n'est pas infini car le rayon lumineux est une approximation. La lumière étant une onde, elle a une certaine étendue qui est voisine de sa longueur d'onde λ, ce qui correspond à un Δi fini : $\Delta i = \lambda/(r \cos i_m)$ r étant le rayon de la goutte.
Cela entraîne $\Delta a = 2 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m) \ \Delta i^2$ (on obtient ce résultat par un développement limité au second ordre de a = f(i) (cf : Annexe)) ou
$\mathbf{a = a_m - 2 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m) \ (i - i_m)^2 = a_m - ((4 - n^2)/(n^2 - 1))^{1/2} \ (i - i_m)^2}$

$\mathbf{a = a_m - 1{,}64 (i - i_m)^2}$

$\Delta a/\Delta i = 2 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m) \ \Delta i$
$Is_{max} = k I_0 \, di/da = k I_0 /(\Delta a/ \Delta i) = k I_0 (n^2 - \sin^2 i_m)/(2 \sin i_m \ \Delta i)$

Is_{max}= k I_0 r cos i_m (n² - sin² i_m)/(2 λ sin i_m) = 4 k I_0 r (n² - 1)$^{3/2}$ /(6 λ (4 - n²)$^{1/2}$)

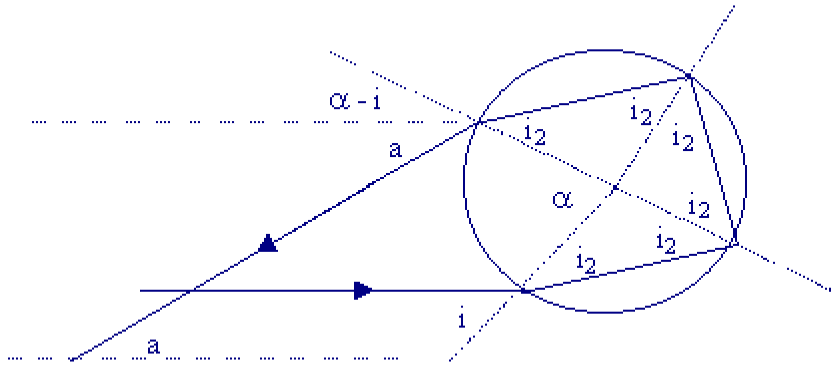
$Is = 0{,}02\ I_0 /(|\ i - i_m|)$ et $a_m - a = 1{,}64\ (\ i - i_m\ )^2$ donc

$Is = 0{,}0256\ \ I_0 /(a_m - a)^{1/2}$

Exemple : Pour λ = 500 nm et une goutte de 1mm de rayon, on obtient $Is_{max} = 31{,}7\ I_0$ pour l'angle a_m = 41,6 ° (Pour a = 40 ° on obtient Is = 0,15 I_0 (200 fois moins) on voit bien à quel point l'intensité lumineuse chute dès qu'on s'écarte de l'angle **a_m**).

3. L'arc secondaire

3.1 Schéma



3.2 Angle de sortie a

$\alpha = 360 - 3(180 - 2\ i_2\ ) = 6\ i_2 - 180$

$\alpha - i + a = i$

$a = 2\ i - \alpha = 2\ i - 6\ i_2 + 180$

$a = 180 + 2\ i - 6\ i_2$

$i_2 = \arcsin(\sin i /n)$

$a = 180 - 6 \arcsin(\sin i /n) + 2i$

cette fonction passe par un maximum quand da/di = 0

$da/di = - 6 \cos i /n/(1 - \sin^2 i /n^2)^{1/2} + 2 = 2\ (-3\ (1 - \sin^2 i\ )^{1/2}/n/(1 - \sin^2 i /n^2)^{1/2} + 1) =$

$da/di = 2\ (-3\ (1 - \sin^2 i\ )^{1/2}/(n^2 - \sin^2 i\ )^{1/2} + 1)$

cette valeur s'annule quand $(1 - \sin^2 i_m\ )^{1/2}/(n^2 - \sin^2 i_m\ )^{1/2} = 1/3$ ou

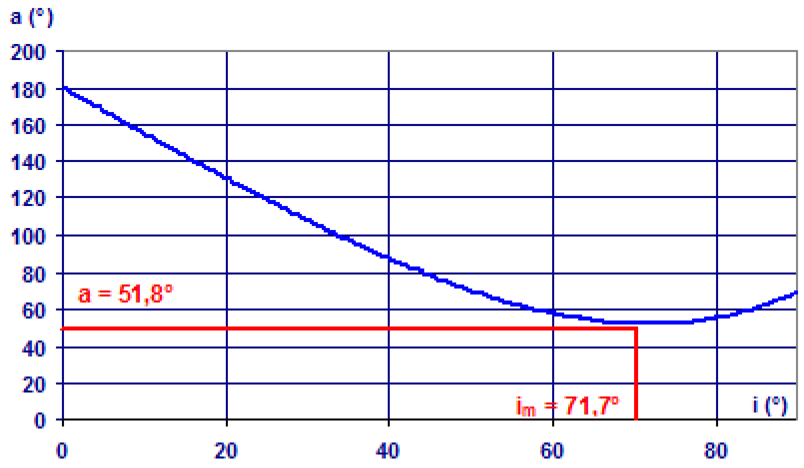
$(1 - \sin^2 i_m\ )/(n^2 - \sin^2 i_m\ ) = 1/9$ donc

$9 = n^2 + 8 \sin^2 i_m$

$\sin i_m = ((9 - n^2)/8)^{1/2}$

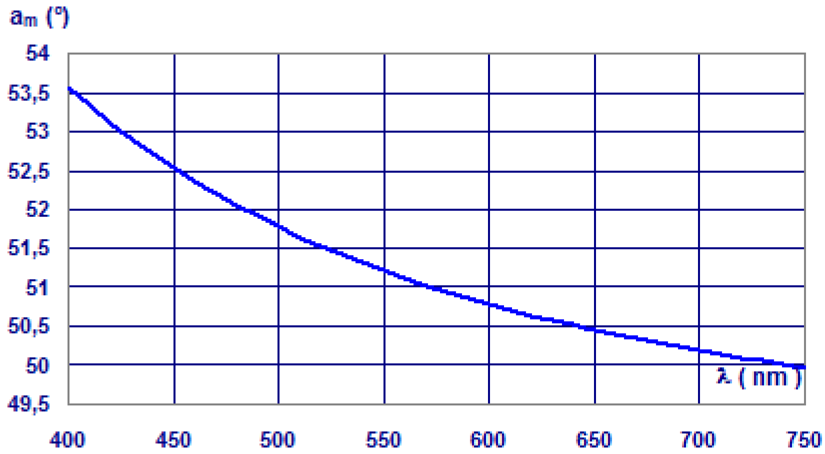
Exemple : pour λ = 500 nm, n = 1,336 et i_m = 71,7° et a_m = 51,8 °

Courbe a = f(i)   (λ = 500 nm)



La courbe passe par un minimum pour i = 71,7° (pour λ = 500 nm), c'est pour cet angle que l'on a l'arc-en-ciel secondaire

Courbe a_m= f(λ)



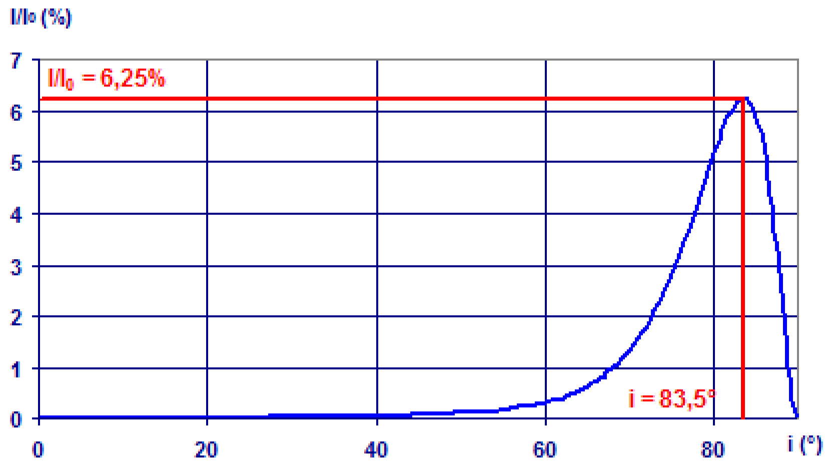
L'angle de sortie a_m diminue avec λ. Le violet est donc au dessus de l'arc et le rouge en dessous. C'est l'inverse de l'arc principal.

3.3 Intensité de sortie

La lumière pénètre dans la goutte (1 - R), se réfléchit deux fois (R²),
sort de la goutte (1 - R).

donc
$$I/I_0 = R^2(1 - R)^2$$

Courbe $I/I_0 = f(i)$ (λ = 500 nm)



La courbe passe par un maximum pour i = 83,5° (pour λ = 500 nm), mais ce n'est pas pour cet angle que l'on a l'arc-en-ciel

3.4 Intensité de l'arc-en-ciel

L'observateur reçoit la lumière émise dans un petit angle autour de chaque direction de l'espace. Il faut donc calculer l'intensité lumineuse par degré I_s en fonction de l'angle de sortie a.

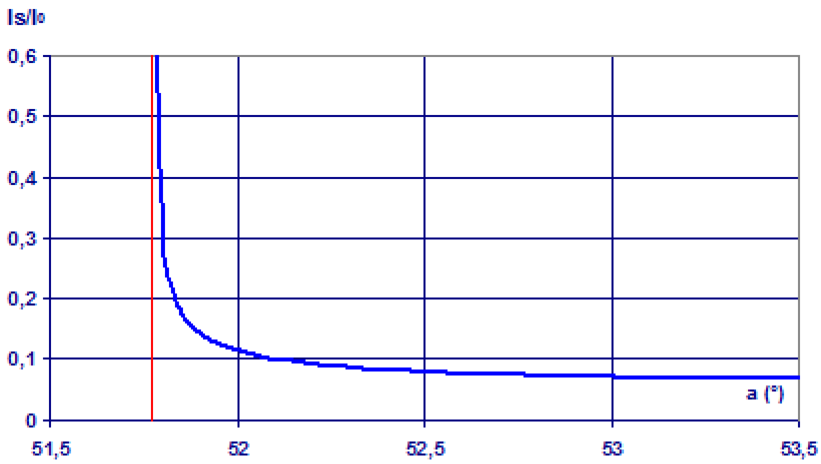
L'intensité qui sort dans un angle da est celle (I_0) qui est entrée dans un angle di (multipliée par le facteur de transmission $k = R^2(1 - R)^2$)

$Is\, da = k\, I_0\, di$

$Is = k\, I_0\, di/da = k\, I_0 /(da/di)$

$Is = k\, I_0 /(2 - 6 (1 - \sin^2 i)^{1/2}/(n^2 - \sin^2 i)^{1/2})$

Courbe $I_s = f(a)$ (λ = 500 nm)



La courbe atteint un maximum très pointu pour a_m = 51,8° (pour λ = 500 nm), c'est la raison pour laquelle on ne voit l'arc-en-ciel que dans une direction bien particulière. L'angle a_m dépend de λ, on voit donc le spectre du soleil se former entre 50° et 53,6°
Il n'y a aucune lumière en dessous de l'arc puisque la courbe commence à a_m et comme c'est le contraire pour l'arc principal (pas de lumière au dessus), l'arrière-plan est parfaitement net entre les deux arcs principal et secondaire, cela donne une impression d'obscurité entre les deux arcs. Cette zone a été appelée bande sombre d'Alexandre.

3.5 Allure de la courbe au voisinage de a = a_m

On pose $x = i - i_m$ (x petit)
$Is = k I_0 /(2 - 6 (1 - \sin^2(i_m + x))^{1/2}/(n^2 - \sin^2(i_m + x))^{1/2})$
On fait un développement limité et on obtient :
$Is = k I_0 /(2 (n^2 - 1) \tan i_m/(n^2 - \sin^2 i_m)\ x) = 16 k I_0 /(9((9 - n^2)/(n^2 - 1))^{1/2}\ x)$
$\mathbf{Is = 16 k I_0 /(9((9 - n^2)/(n^2 - 1))^{1/2} (| i - i_m|)) = 1,07.10^{-2} I_0 /(| i - i_m|)}$

Si $i = i_m$, Is tend vers l'infini. En réalité Is n'est pas infini car le rayon lumineux est une approximation. La lumière étant une onde, elle a une certaine étendue qui est voisine de sa longueur d'onde λ, ce qui correspond à un Δi fini : $\Delta i = \lambda/(r \cos i_m)$ r étant le rayon de la goutte.
Cela entraîne $\Delta a = 3 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m)\ \Delta i^2$ (on obtient ce résultat par un développement limité au second ordre de a = f(i)) (cf : Annexe)) ou
$\mathbf{a = a_m + 3 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m)\ (i -i_m)^2 = a_m + ((9 - n^2)/(n^2 - 1))^{1/2}\ (i -i_m)^2}$
$\mathbf{a = a_m + 3,03 (i -i_m)^2}$

$\Delta a/\Delta i = 3 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m)\ \Delta i$
$Is_{max} = k I_0\, di/da = k I_0 /(\Delta a/ \Delta i) = k I_0 (n^2 - \sin^2 i_m)/(3 \sin i_m\ \Delta i)$
$\mathbf{Is_{max}= k I_0 r \cos i_m (n^2 - \sin^2 i_m)/(3 \lambda \sin i_m) = 9 k I_0 r (n^2 - 1)^{3/2} /(24 \lambda (9 - n^2)^{1/2})}$

$Is = 1,07.10^{-2} I_0 /(| i - i_m|)$ et $a_m - a = 3,03 (i -i_m)^2$ donc
$\mathbf{Is = 1,86.10^{-2} I_0 /(a -a_m)^{1/2}}$

Exemple : Pour λ = 500 nm et une goutte de 1mm de rayon, on obtient $Is_{max} = 3,56 I_0$ pour l'angle a_m = 51,8 ° (Pour a = 54 ° on obtient Is = 0,095 I_0 (40 fois moins) on voit bien à quel point l'intensité lumineuse chute dès qu'on s'écarte de l'angle $\mathbf{a_m}$).
L'arc secondaire a une intensité environ dix fois plus faible que l'arc principal.

4. Tout cela est bien beau... mais les gouttes sont-elles sphériques ?

Cette théorie suppose que les gouttes d'eau sont sphériques, or on voit souvent représenter les gouttes soit en forme de... goutte d'eau, l'avant bombé et la queue en pointe ou en forme de blinis, une sorte de lentille horizontale aplatie. Qu'en est-il ? D'abord, on voit que ces deux modèles sont contradictoires, le premier est justifié par l'aspect aérodynamique de la forme en goutte d'eau qui allongerait la goutte et le second par le frottement de l'air sur l'avant de la goutte qui aplatirait la goutte. Ensuite l'aspect parfaitement circulaire de l'arc-en-ciel indique que les gouttes doivent avoir un axe de symétrie autour du rayon de visée et cela quelque soit leur position dans l'arc. Il n'est pas difficile de voir que les deux modèles précédents n'ont pas cette symétrie et que seule la sphère l'a, cette symétrie. L'accord entre la théorie avec une goutte sphérique et les données expérimentales plaide aussi très fortement en faveur de cette forme. Les gouttes sont donc bien sphériques, ce qui est confirmé par l'enregistrement vidéo au ralenti de gouttes de pluie. Pourquoi sont-elles sphériques malgré l'action de l'air ? Elles ont tendance à être sphériques car c'est la forme qui a la surface minimale et donc celle qui minimise l'énergie de tension superficielle. Comme l'eau est un liquide très polaire sa tension superficielle est très forte et comme la goutte a un faible rayon, les forces de frottement de l'air et le poids de la goutte sont incapables de modifier de manière significative la forme sphérique des gouttes. Maintenant pourquoi entend-on encore parler de gouttes de pluie en forme de " goutte d'eau " ou de lentille aplatie ? C'est un mystère. Peut-être ceux qui le font, n'ont-ils jamais vu un arc-en-ciel....

Rq : Les très grosses gouttes de pluie qui peuvent se former au cours des très gros orages sont aplaties par le frottement de l'air, la tension superficielle n'est plus assez forte pour maintenir la forme sphérique. Mais dans ce cas, il n'y a de toutes façons, pas d'arc-en-ciel car le soleil est caché...

Annexe

Pour un angle d'incidence $i = i_m + \varepsilon$ on a un angle de réfraction $i_2 + \alpha$ avec

$\sin^2 i_m = (4 - n^2)/3$ et $\cos i_m/(n \cos i_2) = 1/2$

$\sin(i_m + \varepsilon) = n \sin(i_2 + \alpha)$

$\sin i_m + \varepsilon \cos i_m - \varepsilon^2 \sin i_m = n \sin i_2 + n\, \alpha \cos i_2 - n\, \alpha^2 \sin i_2$

$\varepsilon \cos i_m - \varepsilon^2/2 \sin i_m = n\, \alpha \cos i_2 - n\, \alpha^2/2 \sin i_2$

$\alpha = n \cos i_2/\sin i_2 - 1/\sin i_2\ (n^2 \cos^2 i_2 - 2 n \sin i_2 (\varepsilon \cos i_m - \varepsilon^2/2 \sin i_m))^{1/2}$

$\alpha = n \cos i_2/\sin i_2 - n \cos i_2 /\sin i_2\ (1 - 2 \sin i_2/(n \cos^2 i_2)(\varepsilon \cos i_m - \varepsilon^2/2 \sin i_m))^{1/2}$

$\alpha = (\varepsilon \cos i_m - \varepsilon^2/2 \sin i_m)/(n \cos i_2) = \varepsilon \cos i_m/(n \cos i_2) - \varepsilon^2 \sin i_m/(2 n \cos i_2)$

$\varepsilon \cos i_m/(n \cos i_2) = \varepsilon/2$ donc $\alpha = \varepsilon/2 - \varepsilon^2 \sin i_m/(2 n \cos i_2)$

$a = 4(i_2 + \alpha) - 2 i_m - 2 \varepsilon = a_m + 4 \alpha - 2 \varepsilon = a_m - 4 \varepsilon^2 \sin i_m/(2 n \cos i_2)$

$a = a_m - 2 \varepsilon^2 \sin i_m/(n (1 - \sin^2 i_2) = a_m - 2 \varepsilon^2 \sin i_m/(n (1 - \sin^2 i_m/n^2)^{1/2})$

$a_m - a = 2 \varepsilon^2 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m)^{1/2}$ ou, en posant $\Delta i = \varepsilon = i - i_m$

$\boldsymbol{\Delta a = 2 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m) \ \Delta i^2}$

Pour l'arc secondaire, $a = -6(i_2 + \varepsilon) + 2 i_2 + 2 \alpha$ avec $\sin^2 i_m = (9 - n^2)/8$ et $\cos i_m/(n \cos i_2) = 1/3$ on obtient alors

$\boldsymbol{\Delta a = a - a_m = 3 \sin i_m/(n^2 - \sin^2 i_m) \ \Delta i^2}$