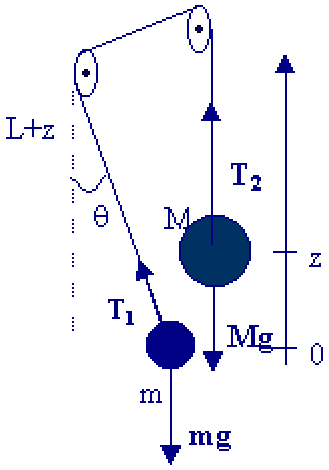
Le pendule d'Atwood

par Gilbert Gastebois

1. Notations

Le pendule d'Atwood est une machine d'Atwood dont l'une des masses oscille.



Les vecteurs sont notés en gras

z	Déplacement de la masse M
r = L + z	Longueur du pendule de masse m
v_r = dz/dt	Vitesse de la masse M et vitesse d'entraînement de m.
T_1	Tension sur la masse m
T_2	Tension sur la masse M
$T_1 = T_2$	(les masses des poulies sont négligées)

θ   Élongation angulaire du pendule
ω = dθ/dt
df/dt est notée f '   et   d²f/dt² est notée f ''

2. Équations différentielles du mouvement.

2.1 Approche Newtonienne

Équation de Newton pour le mouvement tangentiel de la masse m :

Première méthode : Équation de Newton : **d(Jω)/dt = Σ M_F**

d(Jθ')/dt = M_{mg} + M_T

d(Jθ')/dt = - m g r sinθ + 0   (T passe par l'axe donc son moment est nul)

Jθ'' + J'θ' = - m g r sinθ

m r² θ'' + 2 m r r' θ' = - m g r sinθ

θ'' = - g/r sinθ - 2 r'θ'/r = - g/(L + z) sinθ - 2 r'θ' /(L + z)

Deuxième méthode : On se place dans un repère tournant avec la masse m. Ce repère étant non galiléen, on a :

m $\mathbf{a_r}$ = **Σ F** - m $\mathbf{a_e}$ - m $\mathbf{a_c}$ ($\mathbf{a_c}$ accélération de Coriolis (tangentielle) a_c = 2 r'θ'   et $\mathbf{a_e}$ accélération centrifuge (radiale)

m $\mathbf{a_r}$ = $\mathbf{T_1}$ + m **g** - m $\mathbf{a_e}$ - m $\mathbf{a_c}$

On la projette sur un axe tangent, on obtient : (a_θ = r θ'')

m r θ'' = 0 - m g sinθ + 0 - 2 m r'θ'   (**T** et $\mathbf{a_e}$ étant perpendiculaires à l'axe, leur projection est nulle)

θ'' = - g/r sinθ - 2 r'θ' /r = - g/(L + z) sinθ - 2 r'θ' /(L + z)

Équation de Newton pour le mouvement radial de la masse m :

$m\,\mathbf{a_r} = \mathbf{\Sigma\, F} - m\,\mathbf{a_e} - m\,\mathbf{a_c}$ ($\mathbf{a_c}$ accélération de Coriolis (tangentielle) et $\mathbf{a_e}$ accélération centrifuge (radiale) $a_e = -r\,\theta'^2$)

$m\,\mathbf{a_r} = \mathbf{T_1} + m\,\mathbf{g} - m\,\mathbf{a_e} - m\,\mathbf{a_c}$

On la projette sur un axe radial partant de l'axe, on obtient : ($a_{radial} = r'' = z''$)

$m\,r'' = -T_1 + m\,g\cos\theta + m\,r\,\theta'^2 + 0$ ($\mathbf{a_c}$ est perpendiculaire à l'axe donc sa projection est nulle)

$T_1 = mg\cos\theta + m\,r\,\theta'^2 - m\,r'' = mg\cos\theta + m\,r\,\theta'^2 - m\,z''$

Équation de Newton appliquée à la masse M :

$M\,\mathbf{a} = \mathbf{T_2} + \mathbf{Mg}$

Projetée sur Oz, on a

$M\,z'' = T_2 - Mg$

$T_2 = T_1 = mg\cos\theta + m\,r\,\theta'^2 - m\,z''$ donc

$M\,z'' = mg\cos\theta + m\,r\,\theta'^2 - m\,z'' - Mg$ donc

$(M + m)\,z'' = mg\cos\theta + m\,r\,\theta'^2 - Mg$ donc

$\mathbf{z'' = (mg\cos\theta - Mg + m\,r\,\theta'^2)/(M + m)}$

$\mathbf{z'' = (mg\cos\theta - Mg + m\,(L + z)\,\theta'^2)/(M + m)}$

2.2 Approche Lagrangienne

Le lagrangien L est la différence entre les énergies cinétique et potentielle.
On choisit arbitrairement l'altitude 0 au niveau de l'axe et on appelle l_0 la distance de M à l'axe quand z = 0.
L'altitude de m est donc $-\ r\cos\theta$ et celle de M est $-(l_0 - z)$
Les équations de Lagrange pour un système conservatif sont :

$\mathbf{d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = 0}$

$\mathbf{d(dL/dr')/dt - dL/dr = 0}$

$L = E_c - E_p = 1/2\ mv^2 + 1/2\ Mv^2 + mg\,r\cos\theta + Mg(l_0 - z)$

$L = 1/2\ m(v_\theta^2 + v_r^2) + 1/2\ Mv_r^2 + mg\,r\cos\theta + Mg(l_0 - z)$

$v_\theta = r\,\theta'$ et $v_r = z' = r'$ $r = L + z$

$\mathbf{L = 1/2\ m(r^2\theta'^2 + r'^2) + 1/2\ M\,r'^2 + mg\,r\cos\theta + Mg(l_0 - z)}$

$d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = m\,r^2\theta'' + 2\,m\,r\,r'\,\theta' + mg\,r\sin\theta$ donc

$m\,r^2\theta'' + 2\,m\,r\,r'\,\theta' + mg\,r\sin\theta = 0$

$\mathbf{\theta'' = -g/(L + z)\ \sin\theta - 2\,r'\,\theta'/(L + z)}$

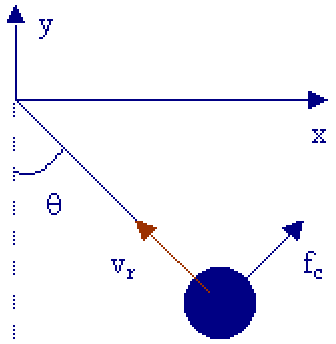
$d(dL/dr')/dt - dL/dr = m\,r'' + M\,r'' - mg\cos\theta + Mg$ donc

$m\,r'' + M\,r'' - m\,r\,\theta'^2 + Mg - mg\cos\theta = 0$

$\mathbf{r'' = z'' = (mg\cos\theta - Mg + m(L + z)\,\theta'^2)/(M + m)}$

Naturellement ces équations fortement non linéaires n'ont pas de solution analytique. On ne peut obtenir qu'une résolution numérique et encore faut-il se limiter aux cas où L + z reste suffisamment grand pour éviter que θ'' ne tende vers l'infini !

2.3 Analyse physique du mouvement.



On peut se demander pourquoi l'amplitude de l'oscillation du pendule est variable.... puisque la seule force qui a un moment non nul est le poids, la tension est très variable, mais son moment est nul puisqu'elle passe par l'axe, donc elle n'a aucun rôle dans le mouvement du pendule ! Qui donc fait ainsi varier l'amplitude du pendule ? C'est la force de Coriolis.

Quand on se place dans un repère lié au pendule, on a un mouvement de rotation global et une vitesse relative radiale, il apparaît alors la pseudo-force $\mathbf{f_c}$ (on a aussi la pseudo-force centrifuge $\mathbf{f_e}$ dont le moment est nul)

$\mathbf{f_c} = 2\ m\ \mathbf{v_r} \times \boldsymbol{\omega}$. $\mathbf{v_r}$ est radial et $\mathbf{v_r}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$ donc $\mathbf{f_c}$ est tangentiel et vaut :

$f_c = -\ 2\ m\ v_r\ \omega$ (v_r vaut $dr/dt = r'$ donc on retrouve de terme d'amplification $a_c = 2\ r'\ \omega$ ou $\theta_c = 2\ r'/r\ \omega$)

Comme f_c est tangentiel, son moment vaut $f_c\ r$ et c'est ce moment qui amplifie ou freine le mouvement.

D'après l'expression du produit vectoriel $\mathbf{v_r} \times \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{f_c}$ est dans le sens du mouvement (amplification) quand $\mathbf{v_r}$ pointe vers l'axe, donc quand la corde raccourcit et $\mathbf{f_c}$ est dans en sens inverse du mouvement (freinage) quand $\mathbf{v_r}$ pointe vers l'extérieur, donc quand la corde rallonge .

Lorsque le pendule se déplace rapidement, si la corde se raccourcit, du travail est produit contre la force centrifuge qui est très grande à cause de la grande vitesse de rotation, ce travail est converti en énergie cinétique par l'intermédiaire de la force de Coriolis, le pendule gagne beaucoup d'énergie et il accélère fortement. Si la corde se rallonge, c'est la force centrifuge qui travaille, le pendule perd beaucoup d'énergie et il freine fortement.

Lorsque le pendule est lent, la force centrifuge est faible et donc elle travaille peu, l'échange d'énergie est faible.

On voit donc que le pendule échange de l'énergie avec la masse M de manière très variable et en pratique chaotique, c'est ce qui explique le mouvement assez imprévisible (bien que déterministe) du pendule.