Animation

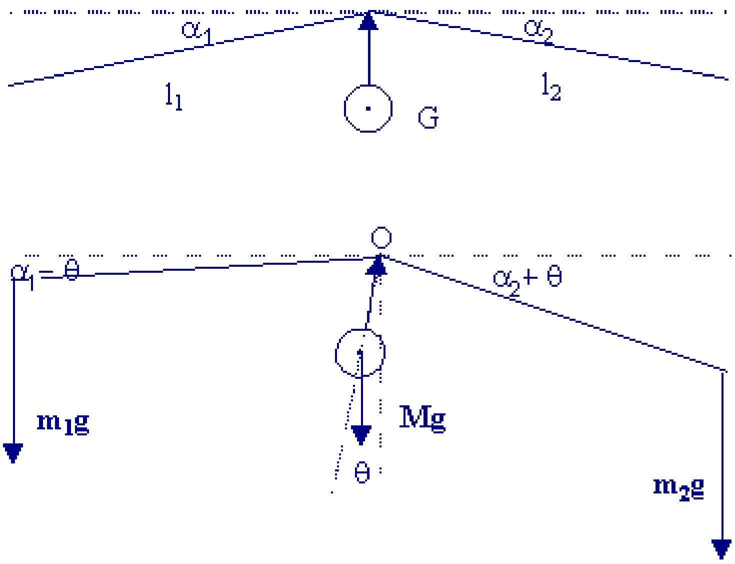
Balances

par Gilbert Gastebois

Animation

1. Trébuchet et Roberval

1.1 Schémas



M masse du fléau
G centre de gravité du fléau
L distance entre l'axe O et G
l_1 longueur de la branche gauche du fléau
l_2 longueur de la branche droite du fléau
α_1 pente de la branche gauche du fléau
α_2 pente de la branche droite du fléau
θ inclinaison du fléau

m_1 masse placée sur le plateau 1
m_2 masse placée sur le plateau 2

1.2. Étude de l'équilibre

A l'équilibre, la somme des moments par rapport à O est nulle
$\mathbf{M_{Mg} + M_{m1g} + M_{m2g} = 0}$

$M_{Mg} = - Mg\, L \sin \theta$
$M_{m1g} = - m_1 g\, l_1 \cos(\alpha_1 - \theta)$
$M_{m2g} = m_2 g\, l_2 \cos(\alpha_2 + \theta)$ donc
$m_2 g\, l_2 \cos(\alpha_2 + \theta) - m_1 g\, l_1 \cos(\alpha_1 - \theta) - Mg\, L \sin \theta = 0$

Les α et θ sont petits donc en ne gardant que les termes du premier ordre :
$\cos(\alpha_2 + \theta) = 1 - (\alpha_2 + \theta)^2/2 = 1 - \alpha_2^2/2 - \theta^2/2 - \alpha_2\theta = 1 - \alpha_2$
$\theta\cos(\alpha_1 - \theta) = 1 - (\alpha_1 - \theta)^2 /2 = 1 - \alpha_1^2/2 - \theta^2/2 + \alpha_1\theta = 1 + \alpha_1 \theta$
$\sin \theta = \theta$
On a donc
$m_2 g\, l_2 (1 - \alpha_2\theta) = m_1 g\, l_1 (1 + \alpha_1 \theta) + Mg\, L\, \theta$
ou $- (m_1 g\, l_1 \alpha_1 + m_2 g\, l_2 \alpha_2 + Mg\, L)\theta + (m_2 g\, l_2 - m_1 g\, l_1) = 0$
La solution est :
$\boldsymbol{\theta = (m_2 l_2 - m_1 l_1)/(m_1 l_1 \alpha_1 + m_2 l_2 \alpha_2 + M L)}$

1.3. Sensibilité de la balance

Pour simplifier on prend $l_1 = l_2 = l$

$\theta = (m_2 - m_1)/(m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + M L/l)$

La balance sera d'autant plus sensible que θ sera grand pour une faible différence $m_2 - m_1$

donc si $m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2 + M L/l$ est le plus petit possible

Il faut donc un long fléau et un centre de gravité le plus proche possible de l'axe, ainsi qu'une faible pente des branches du fléau.

1.4. Double pesée

On a $\theta = 0$ si $m_2 l_2 = m_1 l_1$

Comme les deux longueurs ne peuvent être exactement égales, les deux masses ne le sont pas non plus, ce qui est embêtant...
Pour pallier cet inconvénient, on peut faire une double pesée.

Double pesée de Borda

On place une masse quelconque M_0 ($M_0 > m$ (à peser)) dans le plateau 1 (par exemple), on fait l'équilibre, on obtient $m_2 l_2 = M_0 l_1$

Puis, on place la masse m dans le plateau 2 et on refait l'équilibre en ajoutant des masses marquées m_1 à côté de m. On a alors

$(m + m_1) l_2 = M_0 l_1$

Comme $M_0 l_1 = m_2 l_2$, on a $(m + m_1) l_2 = m_2 l_2$ donc $(m + m_1) = m_2$ et

$\mathbf{m = m_2 - m_1}$

Double pesée de Gauss

On place la masse m à peser, dans le plateau 1, on fait l'équilibre, on obtient $m_2 l_2 = m l_1$

Puis, on place la masse m dans le plateau 2 et on refait l'équilibre, on obtient $m_1 l_1 = m l_2$

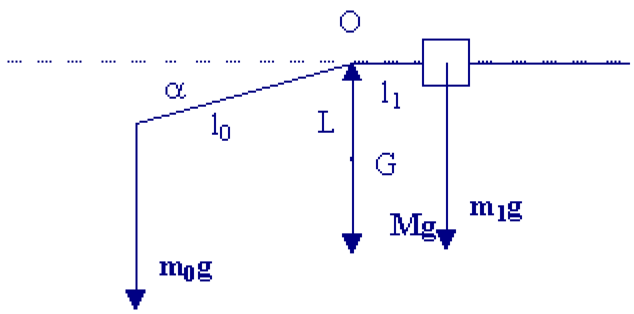
On a alors $l_1/l_2 = m_2 / m = m / m_1$

ou $m^2 = m_1 m_2$

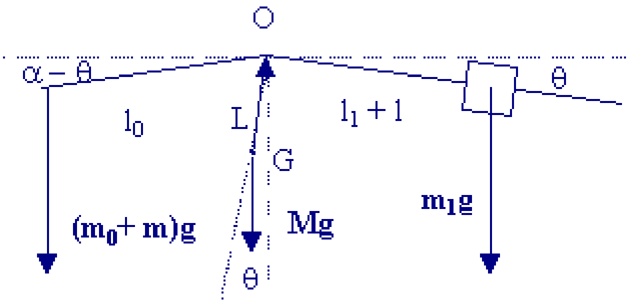
$\mathbf{m = (m_1 m_2)^{1/2}}$

2. Balance romaine

2.1 Schémas



M masse de la balance
G centre de gravité de la balance
L distance entre l'axe O et G
m_1 masse de la surcharge
m_0 masse du plateau
m masse à peser
l_1 distance de la masse m à l'équilibre
l_0 longueur de la branche gauche du fléau
l longueur du déplacement de la surcharge m_1
α pente du fléau



θ inclinaison du fléau droit

2.2. Étude de l'équilibre

A l'équilibre, la somme des moments par rapport à O est nulle

Sans masse m :

$\mathbf{M_{Mg} + M_{m0g} + M_{m1g} = 0}$

$M_{Mg} = 0$

$M_{m0g} = - m_0 g\, l_0 \cos \alpha$

$M_{m1g} = m_1 g\, l_1$ donc

$m_1 l_1 = m_0 l_0 \cos \alpha = 0$

α est petit donc, en ne gardant que le premier ordre

$\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 = 1$

On a donc

$m_1 l_1 = m_0 l_0 = 0$ (relation 1)

Avec la masse m :

$\mathbf{M_{Mg} + M_{(m0+m)g} + M_{m1g} = 0}$

$M_{Mg} = - Mg\, L \sin \theta$

$M_{(m0+m)g} = - (m_0 + m)g\, l_0 \cos(\alpha - \theta)$

$M_{m1g} = m_1 g(l_1 + l) \cos \theta$ donc

$m_1 g(l_1 + l) \cos \theta - (m_0 + m)g\, l_0 \cos(\alpha - \theta) - Mg\, L \sin \theta = 0$

α et θ sont petits donc, en ne gardant que le premier ordre

$\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2 = 1$

$\cos(\alpha - \theta) = 1 - (\alpha - \theta)^2 /2 = 1 - \alpha^2/2 - \theta^2/2 + \alpha\theta = 1 + \alpha\theta$

$\sin \theta = \theta$

On a donc

$m_1 g(l_1 + l) - (m_0 + m)g\, l_0 (1 + \alpha\theta) - Mg\, L\, \theta = 0$

$m_1 g\, l_1 + m_1 g\, l - m_0\, g\, l_0 - m_0\, g\, l_0\, \alpha\theta - m\, g\, l_0 - m\, g\, l_0\, \alpha\theta - Mg\, L\, \theta = 0$

Compte tenu de la relation 1

$m_1 g\, l - m_0\, g\, l_0\, \alpha\theta - m\, g\, l_0 - m\, g\, l_0\, \alpha\theta - Mg\, L\, \theta <= 0$

$(m_0\, g\, l_0 \alpha + m\, g\, l_0 \alpha + Mg\, L)\theta = m_1 g\, l - m\, g\, l_0$

La solution est :

$\boldsymbol{\theta = (m_1 l - m\, l_0)/((m_0 + m)\, l_0 \alpha + M\, L)}$

ou

$\boldsymbol{m = (m_1 l - (m_0\, l_0\, \alpha + M\, L)\theta)/(l_0 + l\, \theta\, \alpha)}$

A l'équilibre : $\boldsymbol{\theta = 0}$ **et** $\boldsymbol{m = m_1 l / l_0}$