Polarisation de la lumière

par Gilbert Gastebois

I . Théorie classique

1. Polarisation circulaire

Une lumière polarisée circulairement est une onde lumineuse dont le vecteur E tourne autour de la direction du rayon lumineux avec une fréquence égale à celle de la lumière.

Dans un repère **x,y,** on a $\mathbf{E_d} = E_0 \cos(\omega t)\ \mathbf{x} + E_0 \sin(\omega t)\ \mathbf{y}$ pour une lumière circulaire droite

et

$\mathbf{E_g} = E_0 \cos(\omega t)\ \mathbf{x} - E_0 \sin(\omega t)\ \mathbf{y}$ pour une lumière circulaire gauche

Si on envoie une lumière polarisée circulairement sur un polariseur aligné sur la direction **x** , seule la composante x va traverser et à la sortie, on aura une lumière polarisée linéairement de vecteur $\mathbf{E_x} = E_0 \cos(\omega t)\ \mathbf{x}$

L'énergie lumineuse I est proportionnelle à E² donc $I_x = E_0^2 \cos^2(\omega t)$ dont la moyenne vaut $E_0^2/2 = E_d^2/2 = I_d/2$

La moitié de la lumière traverse le polariseur et la moitié est absorbée.

2. Polarisation linéaire

Une lumière polarisée linéairement est une onde lumineuse dont le vecteur E garde une direction fixe. On peut la considérer comme la superposition de deux ondes circulaires gauche et droite de même amplitude.

$\mathbf{E_x = 1/2\ (E_d + E_g)} = E_0 \cos(\omega t)\ \mathbf{x}$ qui est une onde polarisée selon la direction **x.**

De même : $\mathbf{E_y = 1/2\ (E_d - E_g)} = E_0 \sin(\omega t)\ \mathbf{y}$ qui est une onde polarisée selon la direction **y.**

Si on envoie une onde polarisée linéairement sur un polariseur aligné dans une direction **x'** faisant un angle θ avec le vecteur $\mathbf{E_x}$, on peut décomposer le vecteur $\mathbf{E_x}$ en ses deux composantes $E_{x'}$ et $E_{y'}$: $E_{x'} = E_x \cos\theta$ et $E_{y'} = E_x \sin\theta$

$E_{x'}$ traverse le polariseur et $E_{y'}$ est absorbée. A la sortie, on a donc une lumière polarisée selon **x'** d'amplitude $E_{x'} = E_x \cos\theta$

L'énergie lumineuse qui a traversé est $I_{x'} = E_x^2 \cos^2\theta = I_x \cos^2\theta$

$\mathbf{I_{x'} = I_x \cos^2\theta}$ **(Loi de Malus)**

L'énergie absorbée par le polariseur est donc $I_{y'} = I_x - I_x \cos^2\theta = I_x \sin^2\theta$

La lumière est constituée de photons : $I_x = n_x h\nu$ et $I_{x'} = n_{x'} h\nu$ donc $\mathbf{n_{x'} = n_x \cos^2\theta.}$

La proportion de photons qui traversent est $\mathbf{n_{x'} / n_x = \cos^2\theta}$ Si E est aligné avec le polariseur, tous les photons passent, s'il est perpendiculaire tous les photons sont absorbés.

Cette théorie classique décrit parfaitement une lumière constituée de milliards de milliards de photons (cas commun), mais que se passe t-il si on a un seul photon ? La théorie classique dit qu'une portion de photon passe et que le reste est absorbé, c'est évidemment inexact : le photon passe ou est absorbé. Seule la mécanique quantique peut expliquer ce qui se passe avec un seul photon.

II . Théorie quantique

1. Description du photon

Le photon est un boson de spin 1. Le spin ne peut avoir que deux directions : dans le sens du déplacement (photon gauche spin = 1) ou en sens contraire (photon droit spin = -1) .
Le photon droit est dans l'état d> et le photon gauche dans l'état g>
Une lumière polarisée circulairement à droite est constituée exclusivement de photons droits et idem pour la gauche.
Une lumière polarisée linéairement est constituée de 50% de photons droits et 50% de photons gauches.

2. Comportement d'un photon traversant un polariseur

Le polariseur met le photon dans un état $x>$ il existe également un état $y>$ "perpendiculaire" . Ces deux états peuvent servir pour décrire un photon :

$g> = 1/\sqrt{2}\ (x> + i\, y>)$

$d> = 1/\sqrt{2}\ (x> - i\, y>)$

ou

$x> = 1/\sqrt{2}\ (d> + g>)$

$y> = 1/\sqrt{2}\ i\ (g> - d>)$

L'amplitude $<x,g>$ pour qu'un photon gauche devienne un photon $x>$ après avoir traversé le polariseur est $<x,g> = 1/\sqrt{2}\ (<x,x> + i <x,y>)$

$<x,y> = 0$ (un photon y n'a aucune amplitude pour être un photon x) donc
$<x,g> = 1/\sqrt{2}\ <x,x> = 1/\sqrt{2}$

L'amplitude $<x,d>$ pour qu'un photon droit devienne un photon $x>$ après avoir traversé le polariseur est $<x,d> = 1/\sqrt{2}\ (<x,x> - i <x,y>)$

$<x,y> = 0$ (un photon y n'a aucune amplitude pour être un photon x) donc
$<x,d> = 1/\sqrt{2}\ <x,x> = 1/\sqrt{2}$

La probabilité est égale au carré de la norme de l'amplitude, donc
$\mathbf{P_x = 1/2}$.
Un photon droit ou gauche a une chance sur deux de traverser un polariseur. Si on a un très grand nombre de photons, il y en a 50% qui traversent et l'énergie est divisée par deux, ce que dit la théorie classique.

2. Comportement d'un photon polarisé linéairement traversant un polariseur

un photon qui a traversé un polariseur est polarisé linéairement. c'est un photon qui a une amplitude pour être droit et une autre pour être gauche. Il apparaît droit une fois sur deux et gauche une fois sur deux.
Il est dans l'état $x> = 1/\sqrt{2}\ (d> + g>)$

S'il traverse un polariseur orienté dans une direction x' faisant un angle θ avec x, il sera dans l'état $x'>$ qui peut s'exprimer en fonction des états $x>$ et $y>$: g> de spin 1 est multiplié par $e^{i\theta}$ et d> de spin -1 est multiplié par $e^{-i\theta}$

$x'> = 1/\sqrt{2}\ (e^{-i\theta}\, d> + e^{i\theta}\, g>)$

$y'> = 1/\sqrt{2}\ i\ (e^{i\theta}\, g> - e^{-i\theta}\, d>)$

L'amplitude pour qu'un photon $x>$ soit un photon $x'>$ est $<x',x> = 1/\sqrt{2}\ (<x',d> + <x',g>)$

En mécanique quantique $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle^*$ donc $\langle x',x\rangle = \langle x,x'\rangle^* = 1/\sqrt{2}\ (e^{i\theta} \langle x,d\rangle + e^{-i\theta} \langle x,g\rangle) = 1/\sqrt{2}\ (e^{i\theta}\ 1/\sqrt{2}\ + e^{-i\theta}\ 1/\sqrt{2}\ )$

$\langle x',x\rangle = 1/2\ (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos\theta$

L'amplitude du photon $x\rangle$ de traverser le polariseur incliné de θ par rapport à x est $\cos\theta$ donc la probabilité de traversée est $P_{x'} = \langle x',x\rangle\langle x',x\rangle^*$

$\mathbf{P_{x'} = \cos^2\theta}$

Un photon polarisé selon x a une probabilité égale à $\cos^2\theta$ de traverser le polariseur. Si on a un très grand nombre n de photons, il y en a n $\cos^2\theta$ qui traversent et l'énergie est $I_{x'} = I_x \cos^2\theta$, ce que dit la théorie classique.

L'amplitude pour qu'un photon $x\rangle$ soit un photon $y'\rangle$ est $\langle y',x\rangle = 1/\sqrt{2}\ (\langle y',d\rangle + \langle y',g\rangle)$

$\langle y',x\rangle = \langle x,y'\rangle^* = 1/\sqrt{2}\ i\ (e^{i\theta} \langle x,g\rangle - e^{-i\theta} \langle x,d\rangle) = 1/\sqrt{2}\ i\ (e^{i\theta}\ 1/\sqrt{2}\ - e^{-i\theta}\ 1/\sqrt{2}\ )$

$\langle x',x\rangle = 1/2\ i\ (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) = \sin\theta$

L'amplitude du photon $x\rangle$ d'être absorbé par le polariseur incliné de θ par rapport à x est $\sin\theta$ donc la probabilité d'absorption est $P_{y'} = \langle y',x\rangle\langle y',x\rangle^*$

$\mathbf{P_{y'} = \sin^2\theta}$

Un photon polarisé selon x a une probabilité égale à $\sin^2\theta$ d'être absorbé par le polariseur. Si on a un très grand nombre n de photons, il y en a n $\sin^2\theta$ qui sont absorbés et l'énergie perdue est $I_{y'} = I_x \sin^2\theta$, ce que dit la théorie classique.

III . Le paradoxe EPR

1. Description de l'expérience

Cette expérience est au départ une expérience de pensée due à Einstein qui cherchait à mettre la mécanique quantique (ou du moins son interprétation dite de Copenhague) en défaut.

En utilisant par exemple, un cristal non linéaire on peut produire deux photons jumeaux de même énergie. A cause de la conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique, les deux photons doivent partir dans deux directions opposées avec des spins de sens opposés. Les deux photons doivent ainsi être tous les deux droits ou tous les deux gauches. L'expérience consiste à faire passer chaque photon à travers un polariseur et à comparer les résultats obtenus pour chaque couple de photons.

2. Etude quantique.

Les photons pouvant être gauches ou droits, l'état du système est une combinaison linéaire des deux possibilités :

$\psi\rangle = a\ \ g_1g_2\rangle + b\ \ d_1d_2\rangle$ avec $a = b = 1/\sqrt{2}$ (état pair) ou $a = - b = 1/\sqrt{2}$ (état impair)

On choisit le cas pair : $\psi\rangle = 1/\sqrt{2}\ (\ g_1g_2\rangle + \ d_1d_2\rangle)$

On cherche l'amplitude pour avoir un photon x et l'autre y , on a

$\langle xy,\psi\rangle = 1/\sqrt{2}\ (\langle x_1y_2,\psi\rangle + \langle x_2y_1,\psi\rangle)$

$\langle xy,\psi\rangle = 1/2\ (\langle x_1y_2, g_1g_2\rangle + \langle x_1y_2, d_1d_2\rangle + \langle x_2y_1,g_1g_2\rangle + \langle x_2y_1, d_1d_2\rangle)$

$\langle xy,\psi\rangle = 1/2\ (\langle x_1,g_1\rangle\langle y_2,g_2\rangle + \langle x_1,d_1\rangle\langle y_2,d_2\rangle + \langle y_1,g_1\rangle\langle x_2,g_2\rangle + \langle x_1,d_1\rangle\langle y_2,d_2\rangle)$

$\langle xy,\psi\rangle = 1/2\ (-i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\ + i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\ -i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\ + i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\ ) = 0$

On cherche également l'amplitude pour avoir un photon *x* et l'autre *x :*

$<xx,\psi> = 1/\sqrt{2}\ (<x_1x_2,\psi> + <x_2x_1,\psi>)$

$<xx,\psi> = 1/2\ (<x_1x_2, g_1g_2> + <x_1x_2, d_1d_2> + <x_2x_1,g_1g_2> + <x_2x_1, d_1d_2>)$

$<xx,\psi> = 1/2\ (<x_1,g_1><x_2,g_2> + <x_1,d_1><x_2,d_2> + <x_1,g_1><x_2,g_2> + <x_1,d_1><x_2,d_2>) =$

$<x_1,g_1><x_2,g_2> + <x_1,d_1><x_2,d_2>$

$<xx,\psi> = 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\ ) = 1$

Pour finir, on cherche l'amplitude pour avoir un photon *y* et l'autre *y :*

$<yy,\psi> = 1/\sqrt{2}\ (<y_1y_2,\psi> + <y_2y_1,\psi>)$

$<yy,\psi> = 1/2\ (<y_1y_2, g_1g_2> + <y_1y_2, d_1d_2> + <y_2y_1,g_1g_2> + <y_2y_1, d_1d_2>)$

$<yy,\psi> = 1/2\ (<y_1,g_1><y_2,g_2> + <y_1,d_1><y_2,d_2> + <y_1,g_1><y_2,g_2> + <y_1,d_1><y_2,d_2>)$

$<yy,\psi> = <y_1,g_1><y_2,g_2> + <y_1,d_1><y_2,d_2>$

$<yy,\psi> = (-i\ 1/\sqrt{2}\ )(-i\ 1/\sqrt{2} + (-i\ 1/\sqrt{2}\ )(-i\ 1/\sqrt{2}\ ) = 1$

En conclusion, on trouve que :
Si les deux polariseurs sont parallèles à *x :*

*S*i le photon 1 est *x* alors le photon 2 doit être *x* également et les deux photons traversent. La probabilité pour cet état vaut 1 et la probabilité pour avoir le photon 1 en *x* et le photon 2 en *y* est nulle.

*S*i le photon 1 est *y* alors le photon 2 doit être *y* également et les deux photons sont absorbés. La probabilité pour cet état vaut 1 et la probabilité pour avoir le photon 1 en *x* et le photon 2 en *y* est nulle.

Si le polariseur 1 est en *x* et le polariseur 2 en *y :*

*S*i le photon 1 est *x* alors le photon 2 doit être *x* également. Le photon 1 traverse et le photon 2 est absorbé.

*S*i le photon 1 est *y* alors le photon 2 doit être *y* également. Le photon 1 est absorbé et le photon 2 traverse.

Ce résultat donné par la théorie quantique est très étrange. Comment les deux photons peuvent-ils corréler leur comportement ? La traversée des polariseurs se fait de manière aléatoire une fois sur deux en moyenne, mais de manière totalement imprévisible. Si deux observateurs comptent les passages à travers les deux polariseurs réglés parallèlement, ils auront des résultats analogues à des tirages à pile ou face et diront que le passage est totalement aléatoire et imprévisible. Mais s'ils comparent ensuite leurs résultats, ils verront que leur liste est absolument identique, comme si deux personnes jouant à pile ou face des millions de fois obtenaient exactement la même succession de piles et de faces ! Einstein a publié avec Podolski et Rosen, un célèbre article où il contestait ce résultat. Pour lui, ou bien les deux photons sont placés dès le début dans les états *x* ou *y* et il doit exister un mécanisme interne aux photons (variables cachées) qui imposent ces états et la mécanique quantique est incomplète puisqu'elle ne rend pas compte de ce mécanisme ou bien les deux photons sont créés dans un état corrélé qui est une superposition des états *x* et *y* et ce n'est qu'au moment ou on fait une expérience à l'aide des polariseurs que les photons se placent dans l'état *x* ou *y* (interprétation de Copenhague), alors pour Einstein, il doit y avoir une information qui circule entre les deux photons au moment ou ils "choisissent" au hasard l'un des deux états, mais ce faisant, cette information doit se déplacer instantanément puisqu'on peut placer les polariseurs à des kilomètres de distance et s'arranger pour que les deux photons les atteignent exactement au même instant. Cette transmission instantanée d'information viole le principe fondamental de la relativité restreinte qui interdit à une information de se déplacer plus vite que la lumière. Dans les deux cas, il semble qu'il y ait un problème, c'est le fameux paradoxe EPR. Pour les tenants de l'interprétation de

Copenhague, il n'y a ni variables cachées, ni transmission d'information entre les deux photons. Les deux photons constituent un seul état et ne peuvent être étudiés séparément même s'ils se trouvent à des distances énormes. Cet état est constitué de la superposition des deux états à deux photons et quand on fait une mesure sur l'un des photons, les deux photons sont concernés et ils passent dans un des états possibles.

Remarque : Si l'état est de polarité impaire, $\psi> = 1/\sqrt{2}$ ($g_1g_2> - d_1d_2>$) et les amplitudes sont :

$<xy,\psi> = 1/2 (-i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2} - i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}\ -i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2} - i\ 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}) = -i$

$<xx,\psi> = 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2} - 1/\sqrt{2}\ 1/\sqrt{2}) = 0$

$<yy,\psi> = (-i\ 1/\sqrt{2})(-i\ 1/\sqrt{2} - (-i\ 1/\sqrt{2})(-i\ 1/\sqrt{2}) = 0$

La probabilité $P_{x,y} = <xy,\psi><xy,\psi>^*$ vaut donc 1

La probabilité $P_{x,x} = <xx,\psi><xx,\psi>^*$ et $P_{y,y} = <yy,\psi><yy,\psi>^*$ valent 0.

3. L'expérience

Le paradoxe EPR resta une pomme de discorde entre Einstein et Bohr sans qu'on pût trancher le débat par une expérience car faire des expériences précises sur un seul photon ne fut possible qu'à la fin du XX ^{ème} siècle. C'est John Bell qui imagina une expérience qui donnerait des résultats différents selon que l'on suppose que les états *x* ou *y* des photons sont prédéfinis (variables cachées) ou que les états ne sont pas prédéfinis (mécanique quantique) ce sont les inégalités de Bell. C'est Alain Aspect à Orsay qui mit au point l'expérience en veillant à éviter toutes les corrélations physiques qui pouvaient entacher l'expérience. Par exemple, la direction de polarisation des polariseurs était déterminée au dernier moment après que les photons s'étaient séparés. Les résultats montrèrent sans ambiguïté que les théories à variables cachées ne rendaient pas compte de l'expérience alors que la théorie quantique était parfaitement vérifiée.