Animation

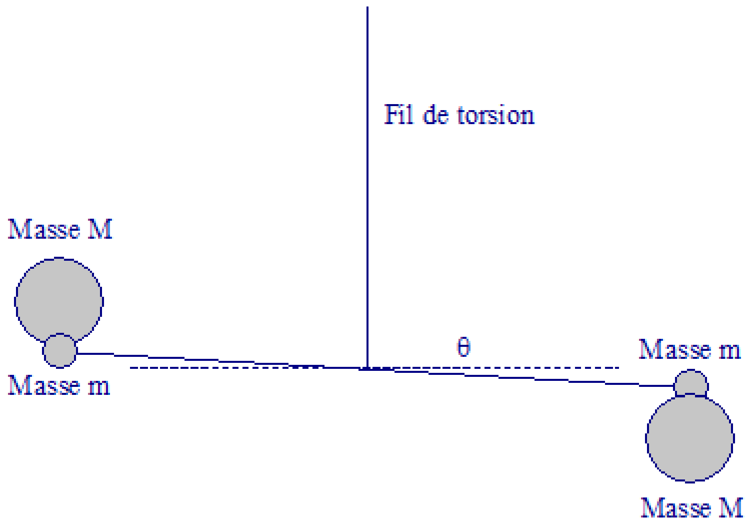
L'expérience de Cavendish

Animation

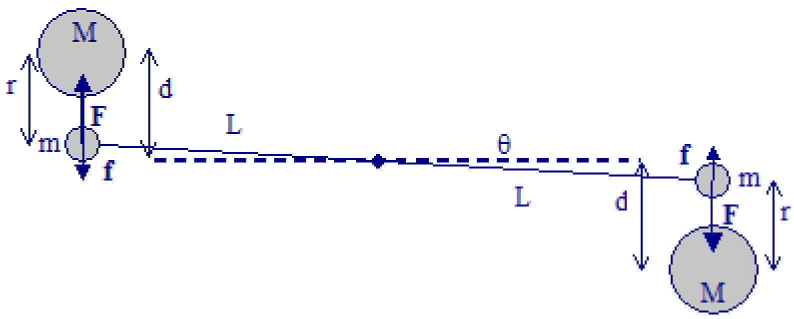
par Gilbert Gastebois

1. Schéma

Vue de côté



Vue de dessus



θ Angle de torsion du pendule (très faible)

R Rayon des masses m

L Distance entre l'axe et le centre de gravité des masses m.

d Distance initiale entre les centres de gravité de m et M

r Distance entre les centres de gravité de m et M. $r = d - L\theta$

J Moment d'inertie du pendule par rapport à son axe. $J = 2mL^2$

F Force de gravitation entre m et M. $F = G\, mM/r^2$

f Force de frottement fluide de l'air sur la masse m. $f = 6\pi\eta RL\, d\theta/dt$

M_C Couple de torsion du fil. $M_C = -C\theta$ (C constante de torsion du fil)

2. Étude du mouvement du pendule de torsion

2.1 Équation différentielle du mouvement.

θ est très faible donc $\sin\theta = \theta$ et $\cos\theta = 1$

Équation de Newton : $\mathbf{J\, d^2\theta/dt^2 = \sum M_F}$

$\mathbf{J\, d^2\theta/dt^2 = M_C + 2M_f + 2M_F}$ (On néglige le très faible moment de la force entre m et l'autre masse M)

$J\, d^2\theta/dt^2 = - C\theta - 2f\,L + 2FL$

$f = 6\pi\eta R\, v = 6\pi\eta RL\, d\theta/dt$ ($d\theta/dt$ est très faible donc le frottement de l'air est laminaire)

$J\, d^2\theta/dt^2 = - C\theta - 12\pi\eta RL^2\, d\theta/dt + 2G\, mML/r^2 = - C\theta - 12\pi\eta RL^2\, d\theta/dt + 2G\, mML/(d - L\theta)^2$

θ étant très petit, $1/(d - L\theta)^2 = (1 - L\theta/d)^{-2}/d^2 = (1 + 2L\theta/d)/d^2$ donc

$J\, d^2\theta/dt^2 = - C\theta - 12\pi\eta RL^2\, d\theta/dt + 2G\, mML(1 + 2L\theta/d)/d^2$

$d^2\theta/dt^2 + 12\pi\eta RL^2/J\, d\theta/dt + (C/J - 4G\, mML^2/(Jd^3))\, \theta = 2G\, mML/(Jd^2) = GM/(Ld^2)$ car $J = 2mL^2$

On pose : $C/J - 4G\, mML^2/(Jd^3) = \omega^2$ et $12\pi\eta RL^2/J = \gamma$

$\omega^2 = C/(2mL^2) - 2GM/d^3$ et $\gamma = 6\pi\eta R/m$

$\mathbf{d^2\theta/dt^2 + \gamma\, d\theta/dt + \omega^2\, \theta = GM/(Ld^2)}$

2.2 Solution de l'équation différentielle.

On cherche une solution du type : $\theta = \theta_e + a\, e^{\alpha t}$

$(\alpha^2 + \gamma\, \alpha + \omega^2)\, a\, e^{-\alpha t} + \omega^2\, \theta_e = GM/(Ld^2)$ donc

$\mathbf{\omega^2\, \theta_e = GM/(Ld^2)}$ et

$\alpha^2 + \gamma\, \alpha + \omega^2 = 0$ ce qui donne :

$\alpha = - \gamma/2 \pm j(\omega^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = \gamma/2 \pm j\, \omega$ car $\gamma \ll \omega$

La solution est donc

$\theta = \theta_e + a\, \exp(-\gamma/2\, t \pm j\, \omega\, t)$ On prend la partie réelle

$\theta = \theta_e + e^{-\gamma/2\, t}\, (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega\, t))$

Conditions initiales : A $t = 0$, $\theta = 0$ et $d\theta/dt = 0$

A $t = 0$, $\theta = 0 = \theta_e + A$ donc $A = - \theta_e$

A $t = 0$, $d\theta/dt = 0 = - A\gamma/2 + B\omega$ donc $B = A\gamma/(2\omega) = - \theta_e\gamma/(2\omega)$

$\theta = \theta_e - e^{-\gamma/2\, t}\, (\theta_e \cos(\omega t) + \theta_e\gamma/(2\omega)\sin(\omega\, t))$

$\mathbf{\theta = \theta_e - \theta_e\, e^{-\gamma/2\, t}\, (\cos(\omega t) + \gamma/(2\omega)\sin(\omega t)) = \theta_e - \theta_e\, e^{-\gamma/2\, t}\, (1 + \gamma^2/(4\omega^2))^{1/2}\cos(\omega t + \varphi)}$

avec $\mathbf{\tan\varphi = -\gamma/(2\omega)}$

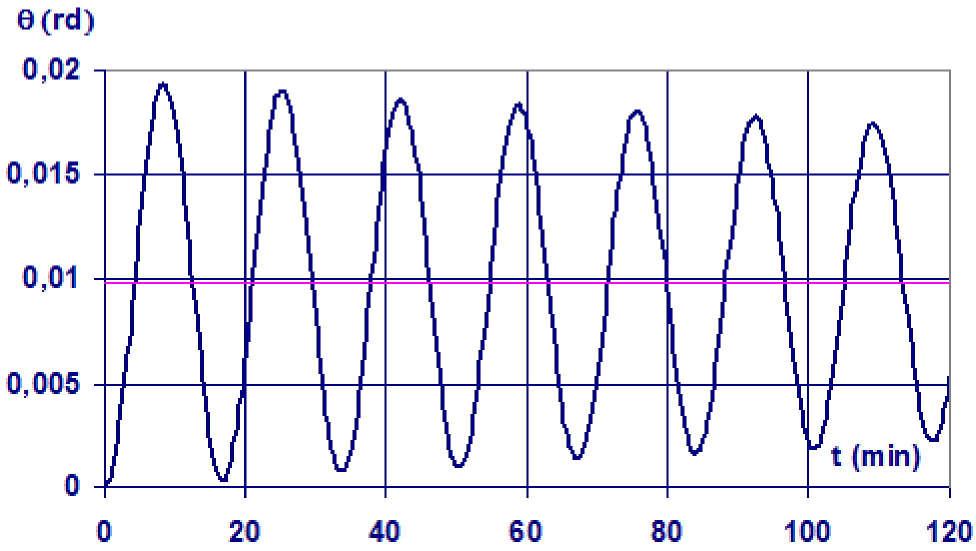
On a donc une oscillation amortie de pulsation ω autour de la position d'équilibre $\mathbf{\theta = \theta_e = GM/(Ld^2\omega^2)}$

2.3 Détermination de θ_e.

On peut déterminer θ_e en attendant l'immobilisation du pendule, mais comme le frottement est très faible, c'est assez long...
On peut aussi le déterminer par le calcul en mesurant $\theta = \theta_m$ pour $t = T/2$

$\theta_m = \theta_e - \theta_e e^{-\gamma T/4} (\cos\pi + \gamma/(2\omega) \sin\pi) = \theta_e + \theta_e e^{-\gamma T/4} = \theta_e(1 + e^{-\gamma T/4})$

$\boldsymbol{\theta_e = \theta_m/(1 + e^{-\gamma T/4}) = (0{,}5 + \gamma T/16)\, \theta_m}$ car γ est très faible



$M = 7{,}00$ kg	$m = 0{,}050$ kg	$L = 0{,}25$ m
$d = 0{,}07$ m	$R = 0{,}0102$ m	$\eta = 18.10^{-6}$ Pa.s
$\theta_m = 0{,}0194$ rd	$T = 1007$ s	$\gamma = 6\pi\eta R/m = 6{,}92.10^{-5}\ s^{-1}$

$\theta_e = (0{,}5 + \gamma T/16)\, \theta_m = 0{,}009785$ rd

3. Détermination de la constante de gravitation G

$\theta_e = GM/(Ld^2\omega^2)$

$\boldsymbol{G = Ld^2\omega^2/M\ \theta_e = 4\pi^2 Ld^2/(MT^2)\ \theta_e}$ $\qquad (T = 2\pi/\omega = 2\pi/(C/(2mL^2) - 2GM/d^3)^{1/2})$

On mesure la période T du pendule pendant qu'il oscille puis on détermine l'angle θ_e dont le pendule a tourné à l'équilibre.
On obtient ainsi la valeur de G : $G = 4\pi^2 Ld^2/(MT^2)\ \theta_e$

Remarque : La période du pendule $T = 2\pi/(C/(2mL^2) - 2GM/d^3)^{1/2}$ est supérieure à sa période propre qui vaut $T_0 = 2\pi(2mL^2/C)^{1/2}$
Exemple : $L = 0{,}25$ m, $M = 7{,}00$ kg, $m = 50$ g, $d = 0{,}07$ m, on obtient $T = 1007$ s et $\theta_e = 0{,}009785$ rd $\quad (T_0 = 970$ s)
$G = 6{,}666.10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$ (0,1% d'écart avec la valeur officielle, ce qui est plutôt bon)