Animation

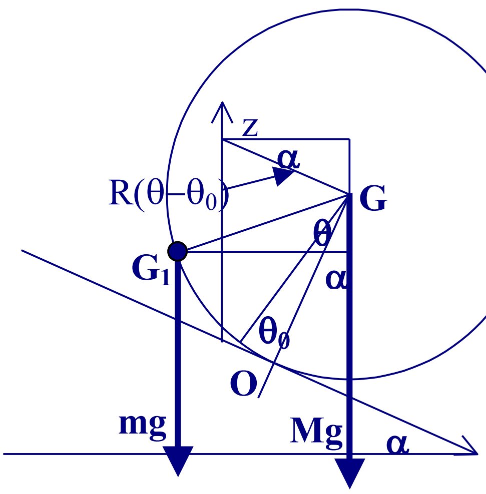
Le cerceau bondissant

Animation

par Gilbert Gastebois

Un cerceau ou un disque est lesté d'une masse ponctuelle fixée sur son bord.
On étudie son mouvement sur un plan incliné.

1. Utilisation du lagrangien



M : Masse du disque
J_G : Moment d'inertie du disque par rapport à G
m : Masse de la surcharge
$R = GG_1$: Rayondu disque
α : Inclinaison de la pente
$\theta = OGG_1$: Angle de rotation du disque
θ_0 : Angle de rotation initial du disque
$z = 0$ à la position initiale de G

Roulement sans glissement : $v_G = v_\theta = R\theta'$

$f' = df/dt \qquad f'' = d^2f/dt^2$

Les vecteurs sont en gras

Lagrangien $\mathbf{L} = Ec - Ep$

Disque : $Ec_M = \frac{1}{2} J_g\theta'^2 + \frac{1}{2} Mv_G^2 = \frac{1}{2} J_g\theta'^2 + \frac{1}{2} MR^2\theta'^2$

$Ep_M = Mgz_G = - MgR(\theta - \theta_0)\sin\alpha$

Surcharge : $Ec_m = \frac{1}{2} mv_{G1}^2 = \frac{1}{2} m(\mathbf{v_G} + \mathbf{v_\theta})^2 = \frac{1}{2} m(\mathbf{v_G}^2 + \mathbf{v_\theta}^2 + 2\mathbf{v_G}.\mathbf{v_\theta})$

$Ec_m = \frac{1}{2} m(R^2\theta'^2 + R^2\theta'^2 - 2R^2\theta'^2 \cos\theta) = mR^2\theta'^2 (1 - \cos\theta)$

$Ep_m = mgz_{G1} = mg(z_G - R\cos(\theta + \alpha) = - mgR(\theta - \theta_0)\sin\alpha - mgR\cos(\theta+\alpha)$

$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \theta'^2(J_g + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta)) + (M + m)gR\sin\alpha\, (\theta - \theta_0) + mgR\cos(\theta+\alpha)$

Equation du lagrangien : $d(d\mathbf{L}/d\theta')/dt - d\mathbf{L}/d\theta = 0$

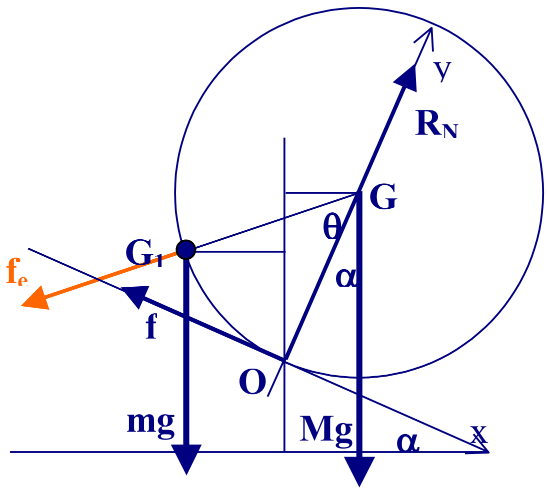
$d(d\mathbf{L}/d\theta')/dt = \theta''(J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta)) + 2mR^2\sin\theta\, \theta'^2$

$d\mathbf{L}/d\theta = mR^2\sin\theta\, \theta'^2 + (M + m)gR\sin\alpha - mgR\sin(\theta + \alpha)$

$\theta''(J_G+MR^2+2mR^2(1-\cos\theta))+2mR^2\sin\theta\, \theta'^2 - mR^2\sin\theta\, \theta'^2 - (M+m)gR\sin\alpha + mgR\sin(\theta+\alpha) = 0$

$$\boldsymbol{\theta'' = ((M + m)gR\sin\alpha - mgR\sin(\theta + \alpha) - mR^2\sin\theta\, \theta'^2)/(J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta))}$$

2. Utilisation de la 2ème loi de Newton



M : Masse du disque
J_G : Moment d'inertie du disque par rapport à G
m : Masse de la surcharge
$R = GG_1$: Rayondu disque
α : Inclinaison de la pente
$\theta = OGG_1$: Angle de rotation du disque

fe : force centrifuge $= mR\theta'^2$

Roulement sans glissement : $v_G = v_\theta = R\theta'$

$f' = df/dt \qquad f'' = d^2f/dt^2$

Les vecteurs sont en gras

2ème loi de Newton en rotation dans un repère lié au disque :

$\mathbf{J\theta'' = \Sigma\, M_{F/O} = M_{Mg/O} + M_{mg/O} + M_{fe/O}} \qquad (M_{RN/O} = M_{f/O} = 0)$

$J_{disque/O} = J_G + Mr^2$ (Théorème de Koenig)

$J_{surcharge/O} = m\, OG_1^2 = m(\mathbf{OG} + \mathbf{GG_1})^2 = m(\mathbf{OG}^2 + \mathbf{GG_1}^2 + 2\,\mathbf{OG.GG_1})$
$J_{surcharge/O} = m(R^2 + R^2 - 2R^2 \cos\theta)$

$J = J_{disque/O} + J_{surcharge/O} = J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta)$

$M_{Mg/O} = MgR\sin\alpha$
$M_{mg/O} = - mg(R \sin(\theta + \alpha) - R\sin\alpha)$
$M_{fe/O =} = - f_e R\sin\theta = - mR\theta'^2 R\sin\theta = - mR^2\theta'^2 \sin\theta$

$(J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta))\, \theta'' = MgR\sin\alpha – mg(R\sin(\theta + \alpha) - R\sin\alpha) – mR^2\theta'^2 \sin\theta$

$\mathbf{\theta'' = ((M + m)gR\sin\alpha – mgR\sin(\theta + \alpha) - mR^2\sin\theta\, \theta'^2)/(J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta))}$

On retrouve l'expression du 1.

3. Décollage du cerceau

Le cerceau peut décoller si la réaction R_N s'annule au cours du mouvement.

Pour déterminer R_N, on projette la 2ème loi de Newton sur l'axe y dans le repère lié au disque

Il n'y a pas de déplacement sur y donc $(M + m)a_y = 0 = Mg_y + mg_y + R_{Ny} + f_y + fe_y$

$0 = - Mg\cos\alpha - mg\cos\alpha + R_N + 0 - f_e\cos\theta = R_N – (M + m)g\cos\alpha - mR\theta'^2\cos\theta$

$\mathbf{R_N = (M + m)g\cos\alpha + mR\theta'^2\cos\theta}$

Le cerceau décolle si :

$\mathbf{|\theta'| > ((1 + M/m)g\cos\alpha /(R\cos\theta))^{1/2}}$

4. Condition de roulement du cerceau

Le cerceau lâché sans vitesse initiale, ne pourra rouler continûment que si après avoir tourné, la masse m peut atteindre le sommet de sa trajectoire avec une vitesse supérieure à zéro.

Angle θ au sommet de la trajectoire (Cf:2) :
$z_{G1} = -R(\theta - \theta_0)\sin\alpha - R\cos(\theta+\alpha)$
z_{G1} est maximum si $dz_{G1}/d\theta = 0$ donc si $-R\sin\alpha + R\sin(\theta + \alpha) = 0$
donc $\theta + \alpha = \pi - \alpha$ et $\theta = \pi - 2\alpha$

Il faut donc que $Ep_{(\pi - 2\alpha)} = Ep_{(\theta 0)}$

$Ep = -(M + m)gR\sin\alpha\,(\theta - \theta_0) - mgR\cos(\theta + \alpha)$ (Cf:2)

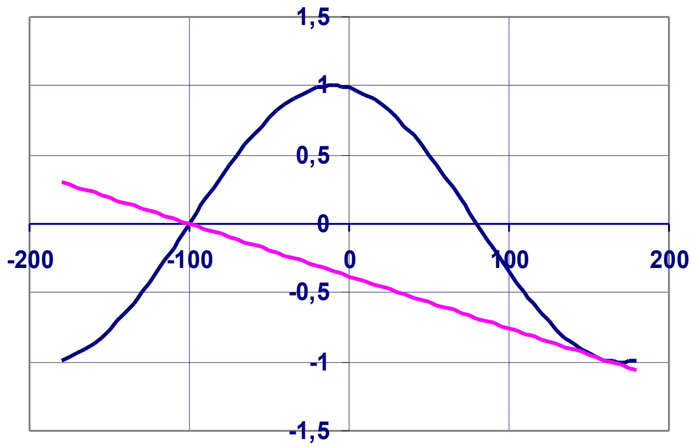
donc il faut $-(M + m)gR\sin\alpha\,(\pi - 2\alpha - \theta_0) - mgR\cos(\pi - \alpha) = - mgR\cos(\theta_0 + \alpha)$

$(M + m)\sin\alpha\,(\pi - 2\alpha - \theta_0) - m\cos\alpha = m\cos(\theta_0 + \alpha)$

$$\mathbf{\cos(\theta_0 + \alpha) = (\pi - 2\alpha)(1 + M/m)\sin\alpha - \cos\alpha - (1 + M/m)\sin\alpha\ \ \theta_0}$$

La solution de l'équation est numérique.

Exemple :



$m = 4\,M$

$\alpha = 10° = 0{,}174$ rd

On trace les deux courbes

$y_1 = \cos(\theta_0 + 0{,}174)$
$y_2 = -0{,}379 - 0{,}217\ \theta_0$

On lit θ_0 pour $y_1 = y_2$

On obtient $\theta_0 = -100°$

La masse m doit donc être placée au dessus de l'horizontale

$\theta_0 + \alpha < -90°$

5. Equilibre du cerceau

Le cerceau est en équilibre si $\theta' = 0$ et $\Sigma\, M_{F/O}$
Il faut donc juste que $M_{Mg/O} + M_{mg/O} = 0$

$MgR\sin\alpha = mg(R\sin(\theta_e + \alpha) - R\sin\alpha)$

$(M + m)gR\sin\alpha = mgR\sin(\theta_e + \alpha)$

$\sin(\theta_e + \alpha) = (1 + M/m)\sin\alpha$

En développant $\sin(\theta_e + \alpha)$, on peut calculer $\sin\theta_e$, on trouve :

$\sin\theta_e = \sin\alpha((1 + M/m)\cos\alpha \ +/-\ (1 - ((1 + M/m)\sin\alpha)^2)^{1/2})$

Une seule solution est stable :

$\sin\theta_e = \sin\alpha\ ((1 + M/m)\cos\alpha\ - (1- ((1 + M/m)\sin\alpha)^2)^{1/2})$

L'équilibre n'est possible que si : $\sin\alpha \leq m/(M+m)$,

si $\sin\alpha = m/(M + m)$, on a $\sin\theta_e = \cos\alpha$ donc $\theta_e = \pi/2 - \alpha$, la surcharge est alors à l'horizontale de G

6. Oscillation autour de l'équilibre

On pose $\theta = \theta_e + \eta$

$\theta' = \eta'$ et $\theta'' = \eta''$

$\sin(\theta + \alpha) = \sin(\theta_e + \eta + \alpha) = \sin(\theta_e + \alpha) + \eta \cos(\theta_e + \alpha)$ au 1^er^ ordre

En ne gardant que le 1^er^ ordre en η et en simplifiant les termes en θ_e

$\eta'' + mgR\cos(\theta_e + \alpha)/(J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta_e))\ \eta = 0$

On a une oscillation harmonique de pulsation :

$\omega = (mgR\cos(\theta_e + \alpha)/(J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta_e)))^{1/2}$

$T = 2\pi((J_G + MR^2 + 2mR^2(1 - \cos\theta_e))/(mgR\cos(\theta_e + \alpha)))^{1/2}$