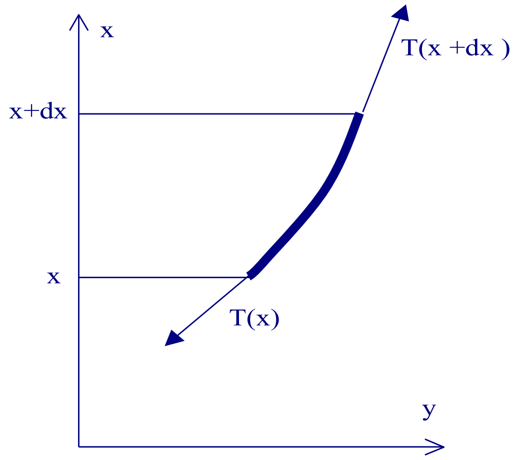
La chaîne pesante

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



On étudie une longue chaîne souple et pesante de masse linéique μ et de longueur L qui oscille transversalement à la fréquence f.

L'extrémité libre de la chaîne est en $x = 0$ et son extrémité fixe en $x = L$

L'amplitude de l'oscillation est faible devant la longueur de la chaîne.

2. Etude du mouvement de la chaîne

2.1 Accélération d'un morceau de longueur dx.

Équation de Newton sur l'axe y : $\boldsymbol{\mu\, dx\, \partial^2 y/\partial t^2 = T(x + dx)_y + (- T(x))_y = T_y(x + dx) - T_y(x)}$

$T_y(x + dx) - T_y(x) = \partial T_y/\partial x \;\; dx$

et $T_y(x) = T\, \partial y/\partial x$ avec $T = \mu\, x\, g$ (Poids de la chaîne placée en dessous de x)

donc $\partial T_y/\partial x = \partial(\mu\, g\, x\, \partial y/\partial x)/\partial x = \mu\, g\, \partial y/\partial x + \mu\, g\, x\, \partial^2 y/\partial x^2$

On obtient : $\mu\, \partial^2 y/\partial t^2 = \mu\, g\, \partial y/\partial x + \mu\, g\, x\, \partial^2 y/\partial x^2$

$$\boldsymbol{1/g \;\; \partial^2 y/\partial t^2 = \partial y/\partial x + x\, \partial^2 y/\partial x^2}$$

2.2 Solution de l'équation.

L'oscillation étant stationnaire, on doit avoir : $y = A(x) \sin(\omega\, t)$

$\partial^2 y/\partial t^2 = - \omega^2 A(x) \sin (\omega\, t) = - \omega^2\, y$ donc

$$\omega^2/g \;\; y + \partial y/\partial x + x\, \partial^2 y/\partial x^2 = 0$$

La solution n'est pas évidente, mais on peut remarquer que l'équation différentielle ressemble un peu à l'équation de Bessel, on peut donc tenter un changement de variable subtil... $u = k\, x^{1/2}$ On obtient alors :

$\omega^2/g\; y + k^2/(4u) \;\; \partial y/\partial u + k^2/4 \;\; \partial^2 y/\partial u^2 = 0$ Pour $k = 2\omega/g^{1/2}$ et en multipliant par u^2 on a :

$\boldsymbol{u^2\, y + u\, \partial y/\partial u + u^2\, \partial^2 y/\partial u^2 = 0}$ ce qui est l'équation de Bessel d'ordre 0.

Sa solution générale est : $y = A\, J_0(u) + B\, N_0(u)$

y étant fini en $x = 0$, la fonction de Neumann $N_0(u)$, infinie en $x = 0$, est exclue, donc $B = 0$.

La solution est donc la seule fonction de Bessel $J_0(u)$ avec $u = 2\, \omega\, (x/g)^{1/2}$.

$\boldsymbol{y = A\, J_0(2\, \omega\, (x/g)^{1/2}) \sin (\omega\, t)}$ avec $\omega = 2\, \pi\, f$

3. Condition d'oscillation de la chaîne

La corde étant bloquée en x = L, il faut que $J_0(2\ \omega\ (L/g)^{1/2}) = 0$.

donc on aura une oscillation pour les valeurs de ω qui donnent un zéro de la fonction J_0 en x = L.

Les premiers zéros de $J_0(u)$ sont pour u = 2,405   5,520   8,654 et 11,79   ce qui donne pour une chaîne de longueur L :

f_0 : $0{,}599/L^{1/2}$ $1{,}376/L^{1/2}$ $2{,}157/L^{1/2}$ et $2{,}939/L^{1/2}$

4. Position des nœuds de vibration de la chaîne

Pour chaque f_0 propre de la chaîne, on a un nœud en x si $4\pi\ f_0\ (x/g)^{1/2}$ est un zéro de la fonction J_0 donc si $4\pi\ f_0\,(x/g)^{1/2} = 2{,}405$ ou   5,520   ou   8,654   ou   11,79   etc....

Par exemple pour une chaîne de longueur L et pour $f_0 = 2{,}157/L^{1/2}$, on a un nœud en $x = 0{,}0772$ L,   en $x = 0{,}407$ L   et   naturellement en x = L