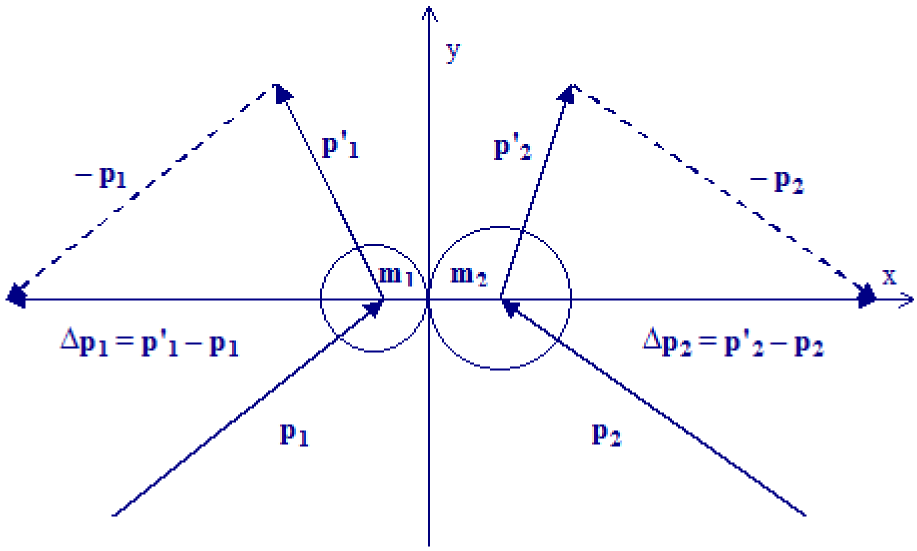
Animation

Les chocs

par Gilbert Gastebois

Animation

1. Schéma



m_1 et m_2	Masses des deux billes
$p_1 = m_1V_1$	Quantité de mouvement de m_1 avant le choc
$p'_1 = m_1V'_1$	Quantité de mouvement de m_1 après le choc
$p_2 = m_2V_2$	Quantité de mouvement de m_2 avant le choc
$p'_2 = m_2V'_2$	Quantité de mouvement de m_2 après le choc
Δp_1	Variation de la qté de mvt de m_1
Δp_2	Variation de la qté de mvt de m_2

$p = p_1 + p_2$

$p' = p'_1 + p'_2$ (p, p', p_1, p_2, p'_1 et p'_2 sont des vecteurs)

2. Conservation de la quantité de mouvement au cours du choc

On étudie le choc très bref et sans frottement de deux sphères dures isolées (Somme des forces extérieures nulle)

Deuxième loi de Newton : $\mathbf{dp/dt = \Sigma F = \Sigma F_{ext} + \Sigma F_{int} = 0 + F_{1\,choc} + F_{2\,choc} = 0}$

car $\mathbf{F_{1choc} + F_{2choc} = 0}$ (3ème loi de Newton)

donc $\mathbf{p}$ = constante donc

$\mathbf{p = p'}$

$\mathbf{p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2}$

$\mathbf{p'_1 - p_1 = -(p'_2 - p_2)}$

$\mathbf{\Delta p_1 = -\Delta p_2}$ (Ce qui est conforme à la 3ème loi de Newton $\mathbf{F_{1choc} = - F_{2choc}}$ car $\mathbf{F_{1choc}} = \Delta \mathbf{p_1}/\Delta t$ et $\mathbf{F_{2choc}} = \Delta \mathbf{p_2}/\Delta t$)

Remarque : Que se passe-t-il si $\mathbf{\Sigma F_{ext}}$ non nulle?

On a alors $\Delta \mathbf{p}/\Delta t = \mathbf{\Sigma F_{ext}}$ et $\Delta \mathbf{p} = (\mathbf{\Sigma F_{ext}})\, \Delta t$

La durée du choc Δt est extrêmement brève donc $\Delta \mathbf{p}$ est très proche de zéro.

Si le choc est bref, la quantité de mouvement se conserve.

3. Étude du choc

Au cours du choc, la quantité de mouvement totale est constante et une partie de l'énergie cinétique totale se transforme en chaleur

$E_c' = k\, E_c$ $\quad k \le 1$ ($k = 1$ correspond au choc parfaitement élastique sans perte d'énergie cinétique)

$\Delta p_{1x} = p'_{1x} - p_{1x}$

$\Delta p_{2x} = p'_{2x} - p_{2x}$

$\Delta p_{1y} = p'_{1y} - p_{1y} = 0$

$\Delta p_{2y} = p'_{2y} - p_{2y} = 0$

$\Delta p_{1x} = - \Delta p_{2x}$ donc

$p'_{1x} - p_{1x} = - p'_{2x} + p_{2x}$

$p'_{2x} = p_{2x} + p_{1x} - p'_{1x} = p_x - p'_{1x}$

$\mathbf{p'_{2x} = p_x - p'_{1x}}$

$\mathbf{p'_{1y} = p_{1y}}$

$\mathbf{p'_{2y} = p_{2y}}$

$E_c = p_1^2/2m_1 + p_2^2/2m_2 = (p_{1x}^2 + p_{1y}^2)/2m_1 + (p_{2x}^2 + p_{2y}^2)/2m_2$

$E_c' = p'^2_1/2m_1 + p'^2_2/2m_2 = (p'^2_{1x} + p'^2_{1y})/2m_1 + (p'^2_{2x} + p'^2_{2y})/2m_2 = k\, E_c$

$m_2 (p'^2_{1x} + p'^2_{1y}) + m_1 (p'^2_{2x} + p'^2_{2y}) = 2m_1 m_2 k\, E_c =$ avec $p'_{1y} = p_{1y}$ et $p'_{2y} = p_{2y}$

$m_2 p'^2_{1x} + m_2 p_{1y}^2 + m_1 (p_x^2 + p'^2_{1x} - 2\, p_x p'_{1x} + p_{2y}^2) = 2m_1 m_2 k\, E_c$

$m_2 p'^2_{1x} + m_2 p_{1y}^2 + m_1 p_x^2 + m_1 p'^2_{1x} - 2m_1 p_x p'_{1x} + m_1 p_{2y}^2 - 2m_1 m_2 k\, E_c = 0$

$(m_1 + m_2)\, p'^2_{1x} - 2m_1 p_x p'_{1x} + m_2 p_{1y}^2 + m_1 p_{2y}^2 + m_1 p_x^2 - 2m_1 m_2 k\, E_c = 0$

Équation du second degré dont la solution est :

$p'_{1x} = (m_1 p_x - (m_1^2 p_x^2 - (m_1 + m_2) (m_2 p_{1y}^2 + m_1 p_{2y}^2 + m_1 p_x^2 - 2m_1 m_2 k E_c))^{1/2})/(m_1 + m_2)$

$\mathbf{p'_{1x} = (m_1 p_x - ((m_1 + m_2) (2m_1 m_2 k E_c - m_2 p_{1y}^2 - m_1 p_{2y}^2) - m_1 m_2 p_x^2)^{1/2})/(m_1 + m_2)}$

$p'_{2x} = p_x - p'_{1x}$

$\mathbf{p'_{2x} = (m_2 p_x + ((m_1 + m_2) (2m_1 m_2 k E_c - m_2 p_{1y}^2 - m_1 p_{2y}^2) - m_1 m_2 p_x^2)^{1/2})/(m_1 + m_2)}$

Les angles sont alors tels que :

$\tan \theta_1 = p_{1y}/p_{1x} = V_{1y}/V_{1x}$

$\tan \theta_2 = p_{2y}/p_{2x} = V_{2y}/V_{2x}$

$\tan \theta'_1 = p'_{1y}/p'_{1x} = V'_{1y}/V'_{1x}$

$\tan \theta'_2 = p'_{2y}/p'_{2x} = V'_{2y}/V'_{2x}$

$k_{min} = (m_2 p_{1y}^2 + m_1 p_{2y}^2)/(2m_1 m_2 E_c) + p_x^2/(2(m_1 + m_2) E_c)$

$k = k_{min} (1 - c_f) + c_f \qquad (0 <= c_f <= 1)$

Remarque : Choix du signe

La solution de l'équation du second degré donne deux solutions possibles, alors comment choisir la "bonne"?

Si la masse m_1 est à gauche, alors elle rebondit vers l'arrière et m_2 est poussé vers l'avant d'autant plus que le choc est élastique (k plus grand). Pour cela il faut choisir le signe - pour p'_{1x} . Si la masse m_1 est à droite, tout est inversé et il faut choisir le signe + pour p'_{1x} .

4. Cas particuliers

4.1 Choc parfaitement élastique de deux masses identiques m dont l'une (m_2) est immobile

$p_{2x} = 0 \quad p_{2y} = 0 \quad p_x = p_{1x} \quad Ec = (p_{1x}^2 + p_{1y}^2)/2m \quad k = 1$

$p'_{1x} = (m\, p_{1x} - (m^2 p_{1x}^2)^{1/2})/(2m) = 0$

$p'_{2x} = (m\, p_{1x} + (m^2 p_{1x}^2)^{1/2})/(2m) = p_{1x}$

$p'_{1y} = p_{1y}$

$p'_{2y} = p_{2y} = 0$

Puisque $p'_{1x} = 0$ et $p'_{2y} = 0$, le résultat du choc est que les deux masses se séparent à angle droit

Si $p_{1y} = 0$ (choc "pleine bille") $p'_{1x} = 0$ et $p'_{1y} = 0$ donc la masse mobile s'immobilise et transfère son mouvement à l'autre. C'est le "carreau".

Remarque : On peut retrouver le même résultat par un raisonnement géométrique.

$E_c = E_c' = p_1^2/2m = (p'^2_1 + p'^2_2)/2m$ donc $p_1^2 = p'^2_1 + p'^2_2$

or $\mathbf{p_1 = p'_1 + p'_2}$

donc $p_1^2 = p'^2_1 + p'^2_2 - 2\, p'_1\, p'_2 \cos(\alpha)$ α angle entre les deux vecteurs $\mathbf{p'_1}$ et $\mathbf{p'_2}$

il faut donc que $\cos(\alpha) = 0$ et ainsi que $\alpha = 90°$

4.2 Choc parfaitement mou des deux masses

Pour un choc parfaitement mou, la perte d'énergie cinétique est maximale donc k est minimal.
k est minimal pour la valeur qui annule le discriminant des solutions de l'équation au-dessus.

$(m_1 + m_2) (2m_1 m_2 k E_c - m_2 p_{1y}^2 - m_1 p_{2y}^2) - m_1 m_2 p_x^2 = 0$

$k_{min} = (p_x^2/(m_1 + m_2) + p_{1y}^2/m_1 + p_{2y}^2/m_2)/(2E_c)$

$Ec_{min}' = k_{min} E_c = 1/2 (p_x^2/(m_1 + m_2) + p_{1y}^2/m_1 + p_{2y}^2/ m_2)$

$$\mathbf{Ec_{min}' = 1/2 (p_x^2/(m_1 + m_2) + p_{1y}^2/ m_1 + p_{2y}^2/ m_2)}$$

$p'_{1x} = m_1 p_x /(m_1 + m_2)$ donc $V'_{1x} = p'_{1x} /m_1 = p_x /(m_1 + m_2)$

$p'_{2x} = m_2 p_x /(m_1 + m_2)$ donc $V'_{2x} = p'_{2x} / m_2 = p_x /(m_1 + m_2) = V'_{1x}$

$p'_{1y} = p_{1y}$

$p'_{2y} = p_{2y}$

Si $p_{1y} = 0$ et $p_{2y} = 0$ (choc "pleine bille") $V'_{1y} = V'_{2y} = 0$ et $V'_{1x} = V'_{2x}$ donc **les deux masses restent collées**.