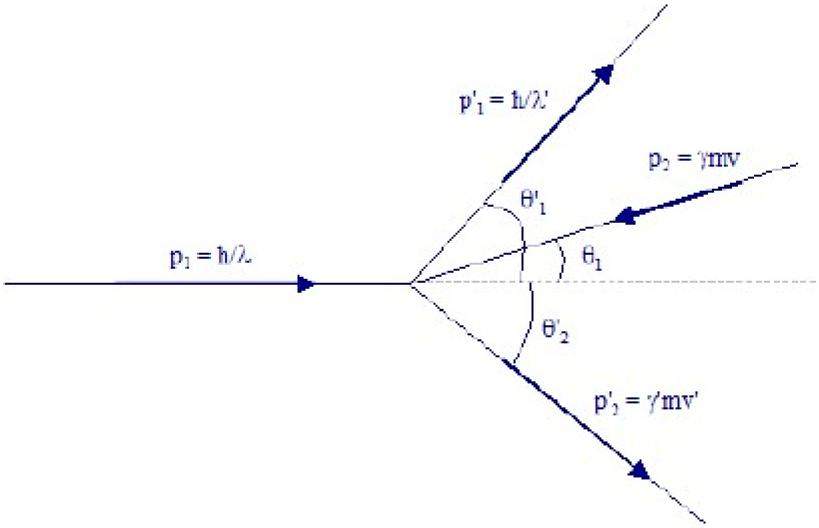
L'effet Compton

par Gilbert Gastebois

Constante de Planck h = 6,626 070 15 × 10^{-34} J.s
Vitesse de la lumière c = 299 792 458 m/s

1. Effet Compton

L'effet Compton est la diffusion d'un photon très énergétique (rayon X dur ou rayon γ de longueur d'onde $\lambda < 10^{-10}$ m environ) sur un électron. Cette diffusion se comporte comme le choc relativiste élastique des deux particules, elle se traduit par l’échange d'une partie de l’énergie entre le photon et l’électron.



Photon

$p_1 = h/\lambda$ Quantité de mouvement avant le choc

$p'_1 = h/\lambda'$ Quantité de mouvement après le choc

$E_1 = p_1c = hc/\lambda$ Énergie avant le choc

$E'_1 = p'_1c = hc/\lambda'$ Énergie après le choc

Électron

m Masse

v Vitesse avant le choc

v' Vitesse apres le choc

$\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

$\gamma' = 1/(1 - v'^2/c^2)^{1/2}$

$p2 = \gamma mv$ Quantité de mouvement avant le choc

$p'2 = \gamma' mv'$ Quantité de mouvement après le choc

$E_2 = \gamma mc^2 = (p_2^2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ Énergie avant le choc

$E'_2 = \gamma' mc^2 = (p'^2_2c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ Énergie après le choc

2. Étude de l'effet Compton. Cas général

Le choc étant élastique, la quantité de mouvement totale et l'énergie se conservent.

$\mathbf{p_1 + p_2 = p'_1 + p'_2}$

$E = E_1 + E_2 = E'_1 + E'_2 = hc/\lambda + \gamma mc^2$

En projection sur les axes x et y, on obtient :

$p_x = p_1x + p_2x = p'_1x + p'_2x$ $\quad$ $px = h/\lambda - \gamma mv \cos\theta_1$

$p_y = p_1y + p_2y = p'_1y + p'_2y$ $\quad$ $py = - \gamma mv \sin\theta_1$

$p_x = p'_1 \cos\theta'_1 + p'_2 \cos\theta'_2$ (1)

$p_y = p'_1 \sin\theta'_1 + p'_2 \sin\theta'_2$ (2)

$E = p'_1 c + (p'^2_2 c^2 + m^2c^4)^{1/2}$ donc

$p'^2_2 c^2 + m^2c^4 = (E - p'_1 c)^2$ (3)

de (1) et (2) on déduit : $p'^2_2 = (p_x - p'_1 \cos\theta'_1)^2 + (p_y - p'_1 \sin\theta'_1)^2$

$(p_x - p'_1 \cos\theta'_1)^2 + (p_y - p'_1 \sin\theta'_1)^2 + m^2c^2 = (E/c - p'_1)^2 = E^2/c^2 + p'^2_1 - 2 p'_1E/c$

$p_x^2 + p'^2_1\cos^2\theta'_1 - 2 p_x p'_1 \cos\theta'_1 + p_y^2 + p'^2_1\sin^2\theta'_1 - 2 p_y p'_1 \sin\theta'_1 = E^2/c^2 + p'^2_1 +2 p'1E/c – m^2c^2$

$p_x^2 + p_y^2 - E^2/c^2 = 2 p'_1E/c + 2 p_x p'_1 \cos\theta'_1 + 2 p_y p'_1 \sin\theta'$

$p'_1 = (E^2/c^{2-} p_x 2 - p_y^2 - m^2c^2) /(2E/c - 2 p_x \cos\theta'_1 - 2 p_y p'_1 \sin\theta'_1)$

$E^2/c^2 - p_x^2 - p_y^2 - m^2c^2 = (h/\lambda + \gamma mc)^2 - (h/\lambda - \gamma mv \cos\theta_1)^2 - (\gamma mv \sin\theta_1)^2 = \gamma^2 m^2c^2 + 2\gamma hmc/\lambda - \gamma^2m^2v^2 + 2\gamma hmv \cos\theta_1/\lambda - m^2c^2$

$E^2/c^2 - p_x^2 - p_y^2 - m^2c^2 = 2\gamma hm/\lambda (c + v \cos\theta_1)$ donc

$\mathbf{p'_1 = \gamma hm(c + v \cos\theta_1) /(E/c - p_x \cos\theta'_1 - p_y \sin\theta'_1)/\lambda}$

$\mathbf{\lambda' = h/p'_1 = \lambda (E/c - p_x \cos\theta'_1 - p_y \sin\theta'_1)/(c + v \cos\theta_1) /(\gamma m)}$

de (1) et (2) on déduit :

$\mathbf{\tan\theta'_2 = (p_y - p'_1 \sin\theta'_1) /(p_x - p'_1 \cos\theta'_1)}$

$\mathbf{p'_2 = ((p_x - p'_1 \cos\theta'_1)^2 + (p_y - p'_1 \sin\theta'_1)^2)^{1/2}}$

$\mathbf{v' = c\, p'_2/(p'^2_2 + m^2c^2)^{1/2}}$

$\mathbf{E'_1 = hc/\lambda'}$

$\mathbf{E'_2 = \gamma' mc^2 = hc/\lambda + \gamma mc^2 - hc/\lambda'}$

3. Cas particulier de l'électron immobile.

Quand un photon γ frappe l'électron externe d'un atome, cet électron a une énergie cinétique de quelques eV, très inférieure à celle du photon. Dans ces conditions, on peut négliger l'énergie de l'électron et le considérer comme immobile. On prend donc :
$v = 0$, $p_x = h/\lambda$, $p_y = 0$, $\gamma = 1$, $E = hc/\lambda + mc^2$

$\lambda' = \lambda/(E/c - p_x \cos \theta'_1)$ **=** $\lambda (h/(mc\lambda) + 1 - h \cos\theta'_1/(mc\lambda))$ **=** $\lambda + h/(mc) (1 - \cos \theta'_1)$

$\boldsymbol{\lambda' = \lambda + h/(mc) (1 - \cos\theta'_1)}$ $h/(mc) = 2{,}425.10^{-12}$ m est appelé longueur d'onde Compton de l'électron

$1/\tan\theta'_2 = (p_x - p'_1 \cos\theta'_1)/(p_y - p'_1 \sin\theta'_1) = - (h/\lambda - h/\lambda' \cos\theta'_1) /(h/\lambda' \sin\theta'_1)$
$1/\tan\theta'_2 = - (1/\lambda - 1/\lambda' \cos\theta'_1) /\lambda' = - (\lambda' - \lambda \cos\theta'_1) /(\lambda' \sin\theta'_1)$
$1/\tan\theta'_2 = - (1 + h/(mc\lambda) (1 - \cos\theta'_1) - \cos\theta'_1)/\sin\theta'_1$
$1/\tan\theta'_2 = - (1 + h/(mc\lambda)) (1 - \cos\theta'_1)/\sin\theta'_1 = - (1 + h\nu/(mc2)) (1 - \cos\theta'_1)/\sin\theta'_1$
comme $1 - \cos\theta = 2 \sin^2 \theta/2$ et $\sin \theta = 2 \sin \theta/2 \cos \theta/2$

$\boldsymbol{1/\tan\theta'_2 = - (1 + E_v/E_e) \tan\theta'_1/2}$ $E_v = h\nu$ $E_e = mc^2$

$\boldsymbol{p'_2 = h((1/\lambda - \cos\theta'_1/\lambda')^2 + \sin^2\theta'_1/\lambda'^2)^{1/2}}$
$\boldsymbol{E'_v = hc/\lambda' = E_v/(1 + E_v/E_e (1 - \cos\theta'_1))}$
$\boldsymbol{E'_2 = \gamma' mc^2 = mc^2 + E_v - E'_v}$
$\boldsymbol{E'_2 = mc^2 + Ev (Ev/Ee (1 - \cos \theta'_1))/(1 + E_v/E_e (1 - \cos \theta'_1))}$ **donc**
$\boldsymbol{E'_c = E_v (E_v/E_e (1 - \cos \theta'_1))/(1 + E_v/E_e (1 - \cos \theta'_1))}$

4. Effet Compton inverse.

Quand un électron ultra-relativiste ($v \sim c$) frappe de plein fouet un photon de faible énergie (lumière visible ou IR), il peut lui transférer une partie de son énergie, le transformant en un photon X ou γ .
Dans ces conditions, on peut négliger l'énergie propre de l'électron devant son énergie totale.
On prend donc :
$v = c$, $p_x = h/\lambda - p_2$, $p_y = 0$
$E/c = h/\lambda + (p_2{}^2 + m^2c^2)^{1/2} = h/\lambda + p_2 + m^2c^2/(2p_2)$
$\theta'1 = \pi$,
$\theta1 = 0$

$\lambda (E/c - px \cos\theta'_1 - py \sin\theta'_1)/(c + v \cos\theta_1) /(\gamma m)$
$\lambda'/\lambda = (h/\lambda + p_2 + m^2c^2/(2p_2) + h/\lambda - p_2)/(2\gamma mc) = (2h/\lambda + mc/(2\gamma))/(2\gamma mc)$
$\lambda'/\lambda = h/(\gamma mc\lambda) + 1/(4\gamma^2) = 1/(4\gamma^2)$ pour $\gamma > 4$ et $\lambda < 100$ nm

$\boldsymbol{\lambda/\lambda' = 4\gamma^2}$ **ou** $\boldsymbol{E'_v = 4 \gamma^2 E_v = 4 E_v /(1 - v^2/c^2)}$ **pour un choc frontal d'un électron ultra-relativiste sur un photon visible**