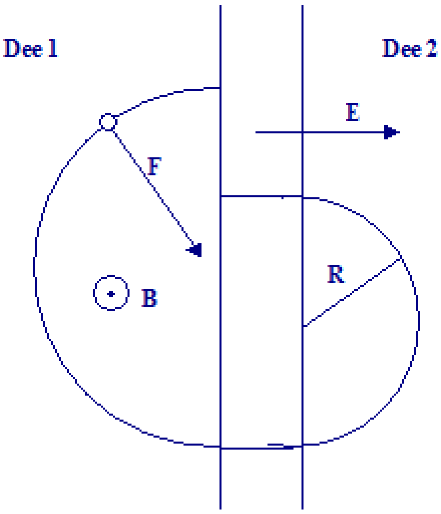
Cyclotron, synchrocyclotron et synchrotron

par Gilbert Gastebois

On pose : $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{½}$

1. Le cyclotron (particules non relativistes)

1.1 Description du dispositif



Le cyclotron est constitué de deux "Dees" séparés par un petit espace. l'ensemble est plongé dans un champ magnétique B constant. Entre les deux Dees, on a une tension U sinusoïdale ($U = Um \cos(qB/m\ t + \varphi)$) et donc un champ électrique E sinusoïdal ($E = E_m \cos(qB/m\ t + \varphi)$). On choisit φ de manière que U soit maximum au moment où la particule passe entre les Dees.
La particule est accélérée entre les Dees et décrit un demi-cercle de rayon R à l'intérieur des Dees. Elle est donc accélérée deux fois par tour.

A l'intérieur des Dees, la particule de masse m et de charge q subit la force de Lorentz $F = q\ v \times B$
Entre les Dees, la particule est accélérée par la force électrique $F = q\ E$

1.2 Trajectoire de la particule

v étant perpendiculaire à **B,** on a $F = q\ v\ B$

F étant perpendiculaire à **v**, l'accélération tangentielle $a_t = dv/dt$ est nulle, donc le module de v est constant et donc la quantité de mouvement $p = \gamma\ m\ v$ est constante
Quand la particule tourne d'un angle $d\theta$ le vecteur **p** tourne aussi de $d\theta$ donc sa variation dp vaut $p\ d\theta$

D'après la deuxième loi de Newton : $dp/dt = F = q\ v\ B$
$p\ d\theta/dt = p\ \omega = p\ v/R = q\ v\ B$
$p/R = qB$

$R = p /(q\ B) = \gamma\ m\ v /(qB) = \text{constante}$

Entre les Dees, la particule est accélérée donc $\Delta E_c = q\ U_m$. A chaque tour la particule a été accélérée deux fois donc $\Delta E_c = 2\ q\ U_m$
Au bout de n tours, $E_c = 2\ n\ q\ U_m$ (La vitesse initiale est négligeable)
Le cyclotron est utilisé pour accélérer des particules lourdes (protons, ions...) jusqu'à des vitesses non relativistes ($v << c$ et $\gamma = 1$) **.**

$R = m\,v/(qB)$
$E_c = 1/2\ m\,v^2 = 2\,n\,q\,U_m$ donc $v = (4\,n\,q\,U_m/m)^{1/2}$
$R = m\,(4\,n\,q\,U_m/m)^{1/2}/(qB) = (4\,n\,m\,U_m/(qB^2))^{1/2}$

$\mathbf{R = (4\,n\,m\,U_m/(qB^2))^{1/2}}$
$\mathbf{v = q/m\ BR}$
$\mathbf{n = qB^2R^2/(4\,m\,U_m)}$ **ou** $\mathbf{R = (4\,mU_m/(qB^2)\ n)^{1/2}}$ (R est proportionnel à $n^{1/2}$)

Exemple : proton ($m = 1{,}67.10^{-27}$ kg et $q = 1{,}6.10^{-19}$ C) $R_{max} = 0{,}3$ m, $B = 0{,}8$ T, $U = 5000$ V
$v_{max} = 2{,}3.10^7$ m/s
$n_{max} = 276$

1.3 Période du cyclotron

$T = 2\pi\,R/v$
$T = 2\pi\,m\,v/(qB)/v = 2\pi\,m/(qB)$ = constante

$\mathbf{T = 2\pi\,m/(qB)}$

$\omega = 2\pi/T = qB/m$ Il faut donc appliquer une tension de pulsation $\omega = qB/m$ ou de fréquence $f = qB/(2\pi\,m)$

Exemple : proton ($m = 1{,}67.10^{-27}$ kg et $q = 1{,}6.10^{-19}$ C) $R = 0{,}3$ m, $B = 0{,}8$ T, $U = 5000$ V , $f = 12{,}2$ MHz

2. Le synchrocyclotron (particules relativistes)

1.1 Description du dispositif

Le dispositif est identique au cyclotron. La seule différence est que la fréquence de la tension n'est pas constante, elle est synchronisée sur celle des particules. D'où son nom.

1.2 Trajectoire de la particule

v étant perpendiculaire à **B,** on a $F = q\,v\,B$

F étant perpendiculaire à **v**, l'accélération tangentielle $a_t = dv/dt$ est nulle, donc le module de v est constant et donc la quantité de mouvement $p = \gamma\,m\,v$ est constante
Quand la particule tourne d'un angle $d\theta$ le vecteur **p** tourne aussi de $d\theta$ donc sa variation dp vaut $p\,d\theta$

D'après la deuxième loi de Newton : $dp/dt = F = q\ v\ B$
$p\ d\theta/dt = p\ \omega = p\ v/R = q\ v\ B$
$p/R = qB$

$R = p/(q\ B) = \gamma\ m\ v/(qB) = \text{constante}$

Entre les Dees, la particule est accélérée donc $\Delta E_c = q\ U_m$. A chaque tour la particule a été accélérée deux fois donc $\Delta E_c = 2\ q\ U_m$
Au bout de n tours, $E_c = 2\ n\ q\ U_m$ (La vitesse initiale est négligeable)
$R = \gamma\ m\ v/(qB)$
$E_c = (\gamma - 1)\ mc^2 = 2\ n\ q\ U_m$

Après quelques calculs, on en déduit :
$\mathbf{R = mc/(qB)\ ((1 + 2\ n\ q\ U_m/(mc^2))^2 - 1)^{1/2}}$
$\boldsymbol{\gamma = (1 + (qBR/(mc))^2)^{1/2}}$
$\mathbf{v = c\ ((qBR/(mc))^2/(1 + (qBR/(mc))^2))^{1/2}}$
$\mathbf{n = ((1 + (qBR/(mc))^2)^{1/2} - 1)\ mc^2/(2qU_m)}$

Si la particule est ultrarelativiste avec perte négligeable par rayonnement (qBR >> mc)
$\boldsymbol{\gamma = qBR/(mc)}$
$\mathbf{v = c}$
$\mathbf{n = cBR/(2U_m)}$ **ou** $\mathbf{R = 2U_m/(cB)\ n}$ (R est proportionnel à n et est indépendant de la nature de la particule !)

Exemple : électron ($m = 0{,}91.10^{-27}$ kg et $q = 1{,}6.10^{-19}$ C) $R_{max} = 0{,}3$ m,
$B = 0{,}1$ T, $U_m = 5000$ V
$\gamma_{max} = 18$
$n_{max} = 900$

1.3 Période du synchrocyclotron

$T = 2\pi\ R/v = 2\pi\ \gamma\ m/(qB)$
$\gamma = (1 + (qBR/(mc))^2)^{1/2}$

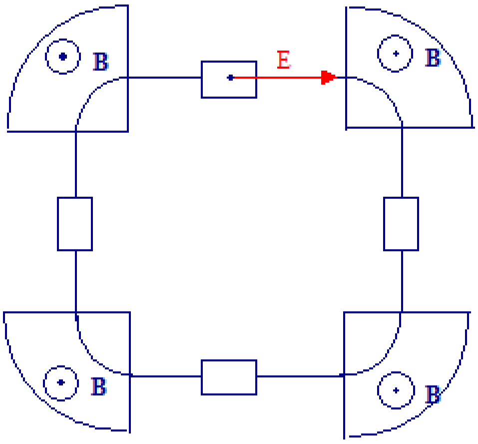
$\mathbf{T = 2\pi\ m/(qB)\ (1 + (qBR/(mc))^2)^{1/2}}$

$\omega = 2\pi/T = qB/(m(1 + (qBR/(mc))^2)^{1/2})$ Il faut donc appliquer une tension de fréquence variable $f = qB/(2\pi\ m\ (1 + (qBR/(mc))^2)^{1/2})$

Si la particule est ultrarelativiste ($\mathbf{qBR_{>>}\ mc}$)
$\mathbf{T = 2\ \pi\ R/c}$ **(Ce qui est normal puisque alors $\mathbf{v = c}$)**
$\mathbf{f = 2\ \pi/T = c/R}$

3. Le synchrotron (Électrons ultrarelativistes)

3.1 Description du dispositif



Le principe est le même que pour le synchrocyclotron à la différence que l'on maintient la trajectoire fixe en adaptant la champ magnétique B qui augmente au fur et à mesure que la quantité de mouvement croît et qu'on y injecte des particules qui ont déjà été accélérées auparavant jusqu'à des vitesses ultrarelativistes.

Le synchrotron est notamment utilisé pour produire un rayonnement électromagnétique puissant.

3.2 Trajectoire de la particule

$v \sim c$ donc $\gamma >> 1$
$R = \gamma\ m\ c\ /(qB)$
$B = \gamma\ m\ c/(qR)$

Sur sa trajectoire, la particule est accélérée k fois donc au bout d'un tour,
$\Delta E_c = k\ q\ U_m - E_{lum}$ (E_{lum} étant l'énergie perdue par rayonnement.)
$\mathbf{B = E_c/(qcR)}$

Exemple : électron ($m = 0{,}91.10^{-27}$ kg et $q = 1{,}6.10^{-19}$ C) $R = 0{,}5$ m
$B = 0{,}3375$ T

4. Émission de lumière par une particule chargée accélérée

Une particule chargée accélérée émet un rayonnement électromagnétique de puissance P
$P = \gamma^4\ q^2/(6\pi\varepsilon_0 c^3)a_p{}^2$ (a_p accélération perpendiculaire à la direction de l'émission)
Cette puissance est importante seulement si γ est très grand (mouvement ultrarelativiste $v = c$). L'émission se fait alors essentiellement dans un cône d'angle au sommet voisin de $1/\gamma$ qui est donc très petit. La longueur d'onde est alors voisine de $\lambda = \pi R/\gamma^2$
Dans ces conditions la perte d'énergie due à l'émission électromagnétique fait chuter l'énergie cinétique de la particule, ce qui nécessite de lui fournir de l'énergie pour maintenir sa vitesse. Cette énergie peut devenir tout à fait rédhibitoire quand on veut obtenir de très grandes valeurs de γ. Pour la minimiser, il faut diminuer a_p en prenant une grande valeur pour le rayon R. Le LHC fait 27 km de circonférence...
Exemple : électron dans le LHC d'énergie E = 100 GeV.
On obtient $\gamma = 2.10^5$, $a_p = c^2/R$ et $P = 3{,}6.10^{-6}$ W de $\lambda = 3{,}4.10^{-7}$ m (UV)
Si on veut maintenir l'énergie de 10^{12} électrons, ce qui n'est pas énorme, il faudra une puissance de 3,6 MW!
Pour un proton d'énergie cent fois plus grande E = 10000 GeV. On obtient
$\gamma = 10000$, $a_p = c^2/R$ et $P = 2{,}5.10^{-11}$ W, ce qui est très raisonnable.