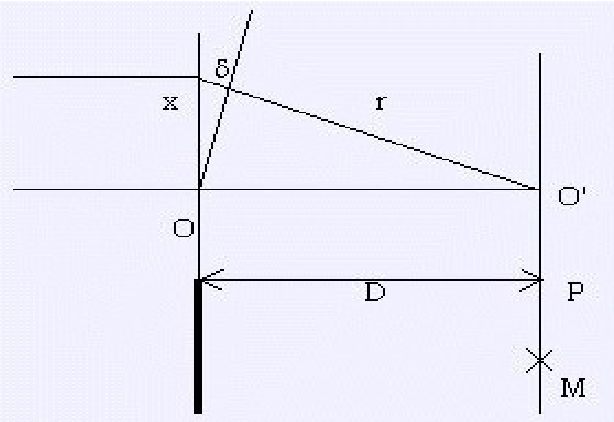
Diffraction de Fresnel

par Gilbert Gastebois

Diffraction par un bord

1. Schéma



2. Intensité de la lumière sur l'écran.

En x, le déphasage par rapport à 0, $\delta = r - D = (D^2 + x^2)^{1/2} - D = D(1 + x^2/D^2)^{1/2} - D$
On développe en série de Taylor au 1er degré $\delta = D(1 + x^2/2D^2) - D = x^2/2D$ *
$\varphi = 2\pi d/\lambda = \pi x^2/(D\lambda)$

L'amplitude des ondes diffractées de l'écran d'abscisse a à l'infini est $A = A_0 \int_a^{\infty} \exp(-j\phi)\, dx$

$$A = A_0 \int_a^{\infty} \exp\left(-j\frac{\pi x^2}{D\lambda}\right) dx$$

On change de variable $u = (\pi/(D\lambda))^{1/2}\, x$ et $dx = (D\lambda/\pi)^{1/2}\, du$

$$A = A_0\, (D\lambda/\pi)^{1/2} \int_{u_a}^{\infty} \exp(-j u^2)\, du = A_0\, (D\lambda/\pi)^{1/2} \left(\int_{u_a}^{\infty} \cos(u^2)\, du - j \int_{u_a}^{\infty} \sin(u^2)\, du \right)$$

$A = A_0\, (D\lambda/\pi)^{1/2}\, ((x_i - x_a) - j\,(y_i - y_a))$

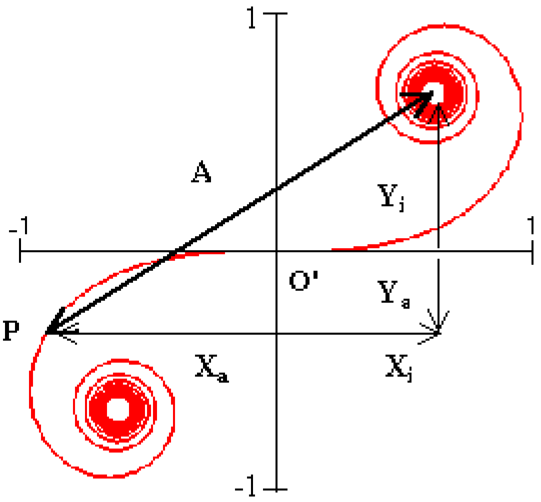
d'où $A = A_0\, (D\lambda/\pi)^{1/2} ((x_i - x_a)^2 + (y_i - y_a)^2)^{1/2}$ avec

$$x_i - x_a = \int_{u_a}^{\infty} \cos(u^2)\, du \qquad \text{et} \qquad y_i - y_a = \int_{u_a}^{\infty} \sin(u^2)\, du$$

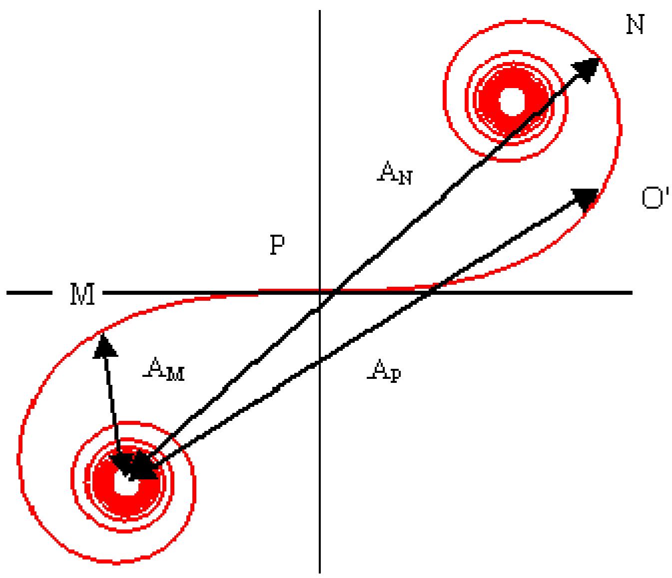
On pose $X = A_0\, (D\lambda/\pi)^{1/2}\, x$ et $Y = A_0\, (D\lambda/\pi)^{1/2}\, y$

$A = ((X_i - X_a)^2 + (Y_i - Y_a)^2)^{1/2}$

Ce sont les intégrales de Fresnel, elles ne peuvent être exprimées algébriquement, mais on peut tracer $Y = f(X)$, on obtient une jolie courbe appelée spirale de Cornu



Sur les axes, 1 correspond à $A_0\ (D\lambda/\pi)^{1/2}$



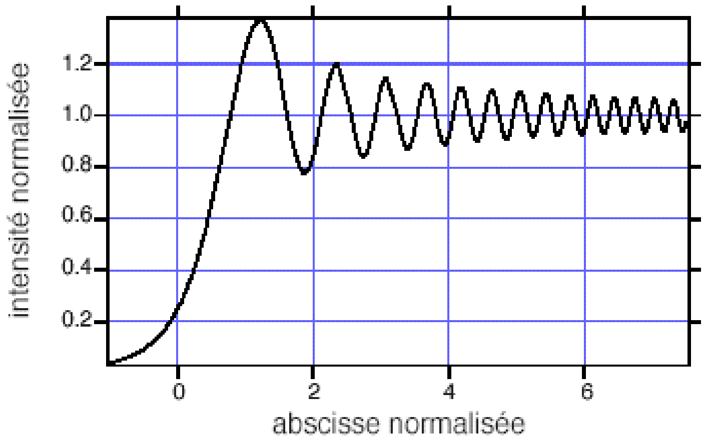
3. Utilisation pratique de la spirale de Cornu normalisée

La distance entre les deux extrémités de la courbe vaut 2.
Les valeurs de x correspondant aux extremums de X sont $\pm ((2k+1)\pi/2)^{1/2}$
Les valeurs de x correspondant aux extremums de Y sont $\pm (k\pi)^{1/2}$

Le milieu de la courbe représente le point P en face du bord de l'écran et la distance O'P le long de la courbe représente la distance x entre P et O' sur l'écran. (C'est $(D\lambda/\pi)^{1/2}$ x)
Pour obtenir l'amplitude en un point, on part de l'infini inférieur et on mesure la distance d entre ce point et le point de l'écran où on veut connaître l'amplitude, $A = A_0\ (D\lambda/\pi)^{1/2}$ d.
Par exemple la distance au point M, A_M représente l'amplitude en M

A l'infini derrière l'écran, A = 0, puis A augmente régulièrement pour atteindre N en passant par $A = A_m/2$ ($I = I_m/4$) en P, puis au dessus de N, elle décroît, puis elle oscille indéfiniment jusqu'à l'infini où elle vaut A_m.

Pour avoir l'intensité, on prend le carré de A : $I = A^2$



Sur cette courbe, une abscisse de 1 représente $x = (D\lambda/2)^{1/2}$
La première frange brillante correspond à 1,21, donc à $x = 1.21\ (D\lambda/2)^{1/2}$
Par exemple pour λ = 630 nm et D = 2 m, la 1ère frange brillante est à x = 0,96 mm et la 10ème à 4,8 mm de la ligne située en face du bord , ce qui est vraiment très petit et explique que le phénomène passe facilement inaperçu.

---

* Les puristes pourront s'inquiéter de l'utilisation de l'approximation x<<D alors qu'on va intégrer sur x de a à l'infini !! En réalité, les seules ondes qui ont de l'importance pour la valeur de A sont les ondes venant de x<<D car pour les autres le déphasage varie très vite et leur somme donne une valeur très proche de zéro, on peut donc se limiter aux faibles valeurs de x. Cependant pour les calculs, il est plus simple d'intégrer jusqu'à l'infini, ce qui ne change pas le résultat.