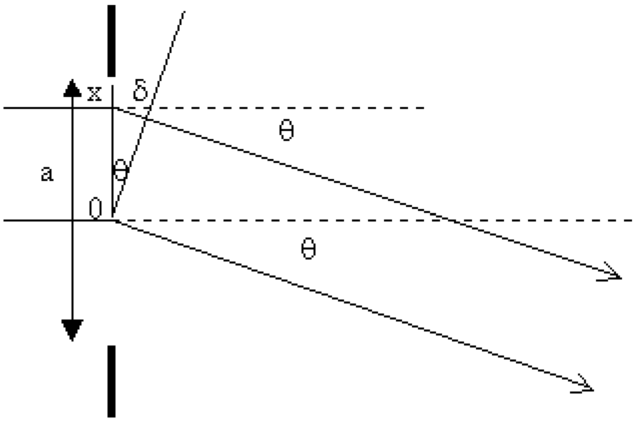
Diffraction de Fraunhofer

par Gilbert Gastebois

1. Diffraction par une fente

1.1 Schéma



1.2 Intensité de la lumière à l'infini.

$a = 2R$

En x, le déphasage par rapport à 0, $\delta = x \sin\theta = x\,\theta$ (θ est petit)

$\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 2\pi\theta/\lambda\ x$

L'amplitude à l'infini des ondes diffractées est

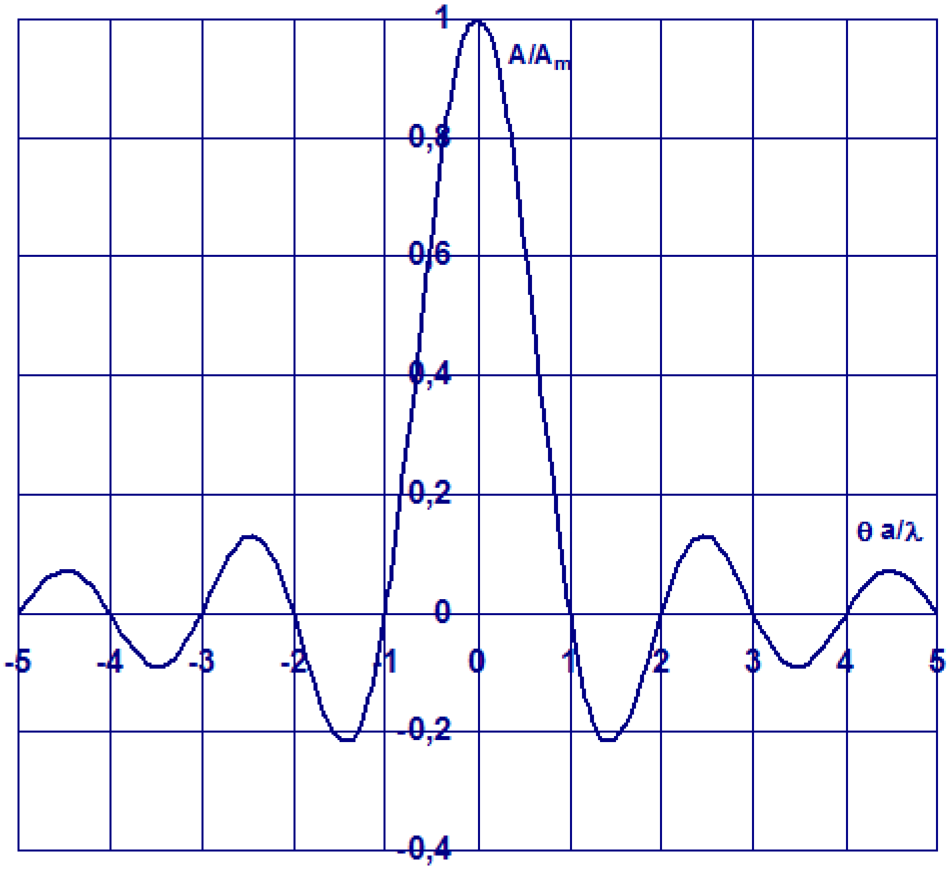
$$A = A_0 \int_{-R}^{R} \exp(-j\varphi)\,dx = A_0 \left(\int_{-R}^{R} \cos\varphi\,dx - j \int_{-R}^{R} \sin\varphi\,dx \right)$$

le terme en sin donne 0, donc $A = A_0 \int_{-R}^{R} \cos(2\pi\theta/\lambda\, x)\,dx = 2A_0 \sin(2\pi\theta/\lambda\, R)/(2\pi\theta/\lambda)$

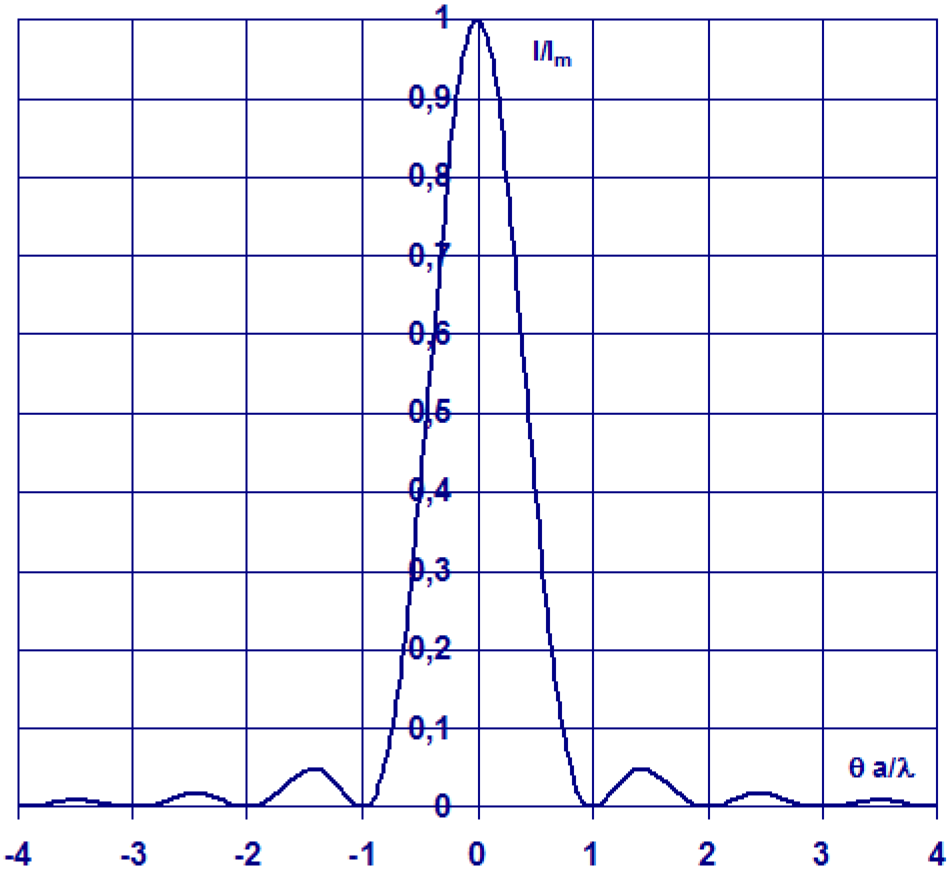
$A = 2RA_0 \sin(\pi a\theta/\lambda)/(\pi a\theta/\lambda)$

$I = A^2 = a^2 A_0^2 \sin^2(\pi a\theta/\lambda)/(\pi a\theta/\lambda)^2$

$$\mathbf{I = I_m} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right)^2} \qquad (I = I_m \text{ pour } \theta = 0)$$



A/A_m
θ a/λ
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5



I/I_m
θ a/λ
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

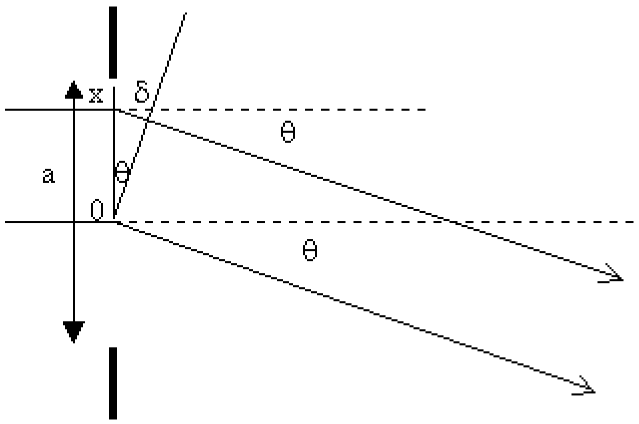
1.3 raies sombres.

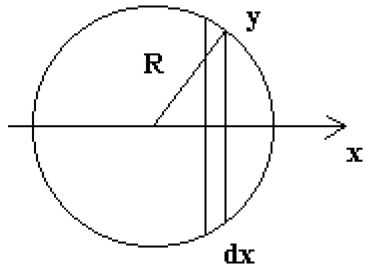
Les zéros correspondent à $\sin^2(\pi a\theta/\lambda) = 0$ donc si $\pi a \theta/\lambda = k\pi$
$\theta/\lambda = k/a$

$\boldsymbol{\theta = k\lambda/a}$

2. Diffraction par un trou circulaire

2.1 Schémas





2.2 Intensité de la lumière à l'infini.

En x, le déphasage par rapport à 0, $\delta = x\sin\theta = x\theta$ (θ est petit)
$\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 2\pi\theta/\lambda\ x$
L'amplitude A_x émise par un élément de surface du trou est $A_0\, 2y\,dx\, e^{-j\varphi}$
$y = (R^2 - x^2)^{1/2}$ donc $A_x = 2A_0(R^2 - x^2)^{1/2} e^{-j\varphi}\,dx$

L'amplitude à l'infini des ondes diffractées est $A = 2A_0 \int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2 - x^2)}\ \exp(-j\varphi)\,dx$

$$A = 2A_0 \int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2 - x^2)}\ \cos\varphi\, dx + j\, 2A_0 \int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2 - x^2)}\ \sin\varphi\, dx$$

le terme en sin donne 0, donc $A = 2A_0 \int_{-R}^{R} \sqrt{(R^2 - x^2)}\ \cos(2\pi\theta/\lambda\ x)\,dx$

$$A = 4A_0 \int_{0}^{R} \sqrt{(R^2 - x^2)}\ \cos(2\pi\theta/\lambda\ x)\,dx$$

On change de variable $u = x/R$, alors $A = 4R^2A_0 \int_0^1 \sqrt{(1-u^2)}\ \cos(2\pi R\theta/\lambda\ u)\,du$

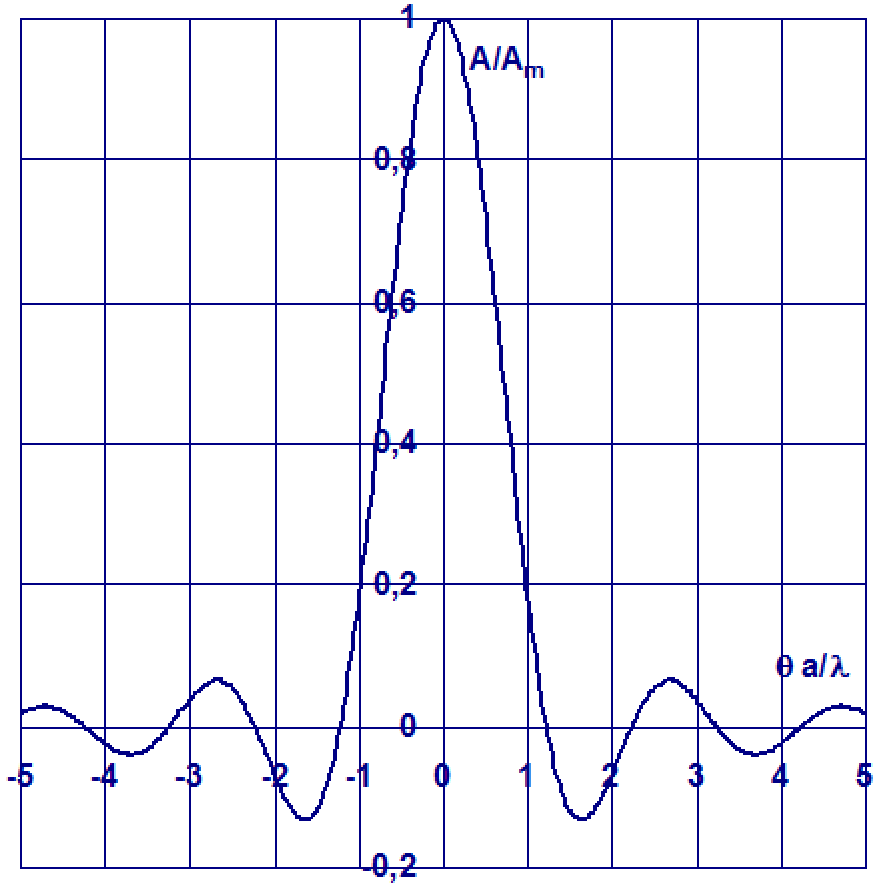
$$A = 4R^2A_0 \int_0^1 \sqrt{(1-u^2)}\ \cos(\pi a\theta/\lambda\ u)\,du$$

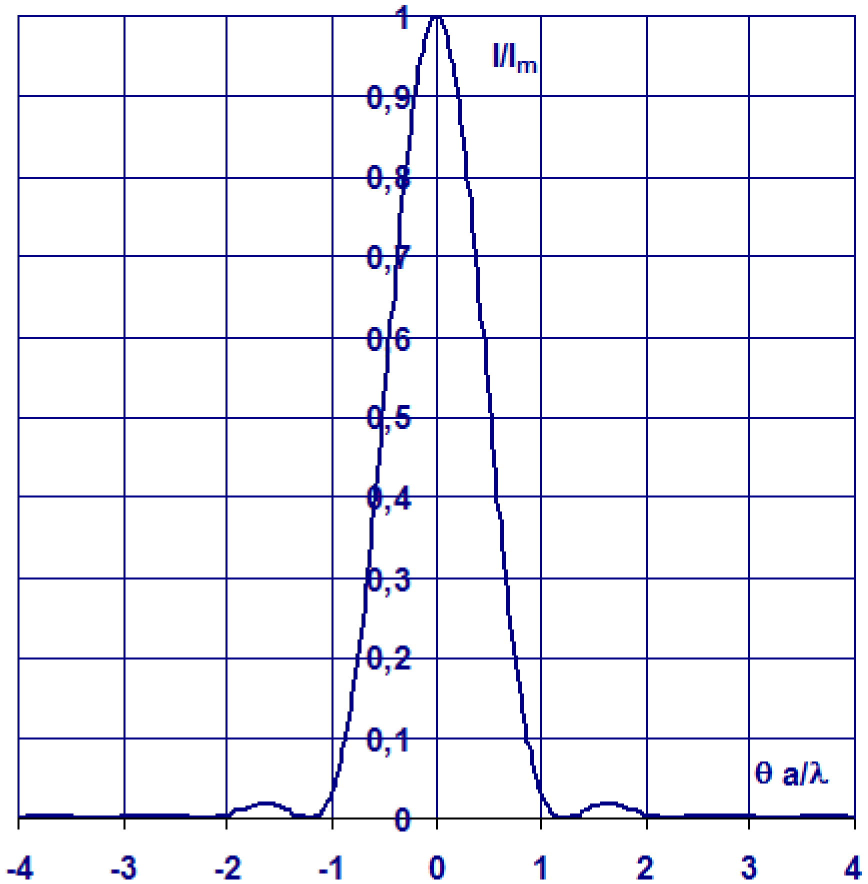
$\int_0^1 \sqrt{(1-u^2)}\ \cos(\pi a\theta/\lambda\ u)\,du = \pi\, J_1(\pi a\theta/\lambda)/(\pi a\theta/(2\lambda))$ $J_1(x)$ est la fonction de Bessel

$J_1(x) = \Sigma\, ((-1)^n (x/2)^{2n+1} /((n+1)!n!))$

$A = \pi R^2 A_0 J_1(\pi a\theta/\lambda)/(\pi a\theta/(2\lambda))$ et $I = A^2 = \pi^2 R^4 A_0^2\ J_1^2(\pi a\theta/\lambda)/(\pi a\theta/(2\lambda))^2$

$$\mathbf{I = I_m}\ \frac{J_1^2\left(\frac{\pi a\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a\theta}{2\lambda}\right)^2} \qquad (\ I = I_m \text{ pour } \theta = 0\ )$$


A/A_m
θ a/λ
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


I/I_m
θ a/λ
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

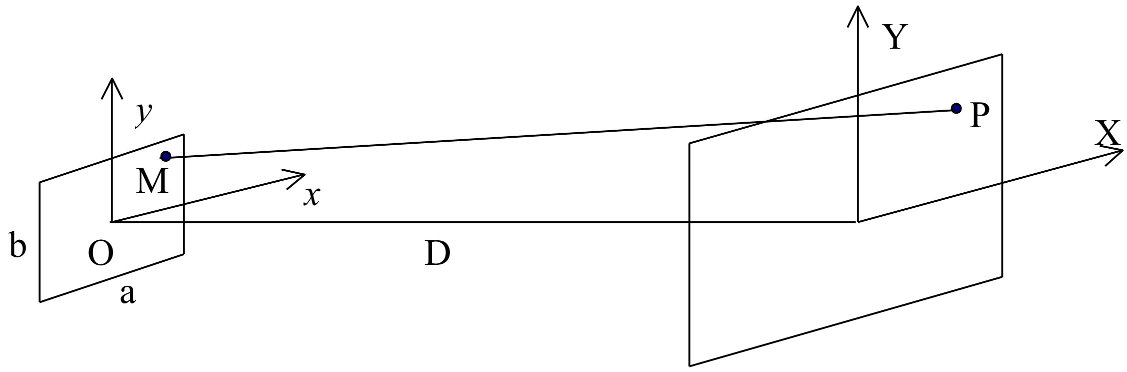
2.3 raies sombres.

Les zéros correspondent à $J_1^2(\pi a\theta/\lambda) = 0$ ce qui correspond à :

$a\theta/\lambda$ = 1,22 ; 2,23 ; 3,24 ; 4,24 ; 5,24 ; 6,24 ; 7,24 ; 8,25 ....

3. Diffraction par une ouverture rectangulaire

3.1 Schéma



3.2 Intensité de la lumière en P très éloigné de O.

D étant très supérieur à X et Y, on prendra $OP = \sqrt{D^2 + X^2 + Y^2} = D$

La distance entre M et P est $MP = |\ \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP}\ | = \sqrt{MO^2 + OP^2 + 2 . MO . OP}$

$MP^2 = MO^2 + OP^2 + 2\ \overrightarrow{MO} . \overrightarrow{OP}$ $MO << OP$ donc $MP^2 = OP^2 + 2\ \overrightarrow{MO} . \overrightarrow{OP}$

$MP^2 = OP^2\ (1 + 2\overrightarrow{MO} . \overrightarrow{OP} /OP^2)$ donc $MP = OP + \overrightarrow{MO} . \overrightarrow{OP} /OP = OP + (xX + yY)/OP$

La différence de marche entre MP et OP est $\delta = MP - OP = (xX + yY)/OP = (xX + yY)/D$

$\varphi = 2\pi\delta/\lambda$

L'amplitude A_{xy} émise par un élément de surface dx dy de l'ouverture, arrivant en P est $A_0\, dx\, dy\, e^{-j\, \varphi}$

$A_{xy} = A_0\, dx\, dy \exp(-j\ \varphi) = A_0\, dx\, dy \exp(-j\ 2\pi\ x\ X/(D\lambda)) \exp(-j\ 2\pi\ y\ Y/(D\lambda))$

$$A = A_0 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \exp\left(-j\ \frac{2\pi X x}{D\lambda}\right) d x \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \exp\left(-j\ \frac{2\pi Y y}{D\lambda}\right) d y$$

$A = A_0\ (\exp(j\pi aX/(D\lambda)) - \exp(j\pi aX/(D\lambda)))/(j2\pi X/(D\lambda))\ \ (\exp(j\pi bY/(D\lambda)) - \exp(j\pi bY/(D\lambda)))/(j2\pi Y/D\lambda))$

$A = A_0\ 2j \sin(\pi aX/(D\lambda))/(j2\pi X/(D\lambda))\ \ 2j \sin(\pi bY/(D\lambda))/(j2\pi Y/(D\lambda))$

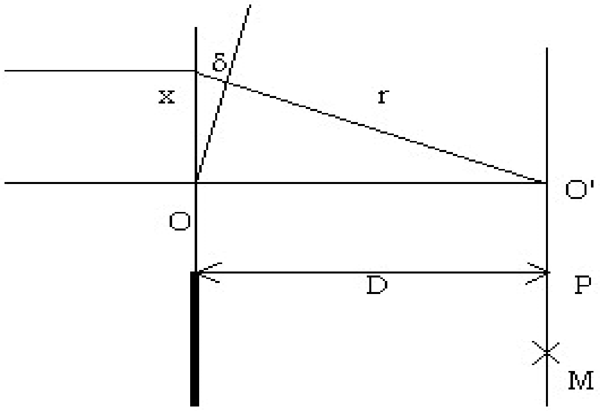
$$\mathbf{A = A_0\, ab} \ \frac{\sin\left(\frac{\pi a X}{D\lambda}\right)}{\frac{\pi a X}{D\lambda}} \ \frac{\sin\left(\frac{\pi b Y}{D\lambda}\right)}{\frac{\pi b Y}{D\lambda}}$$

$$\mathbf{I = A^2 = I_m} \ \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a X}{D\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a X}{D\lambda}\right)^2} \ \frac{\sin^2\left(\frac{\pi b Y}{D\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi b Y}{D\lambda}\right)^2}$$

($I = I_m$ au centre de la tache quand $X = 0$ et $Y = 0$)

3. Pouvoir de résolution d'un instrument d'optique

3.1 Schéma

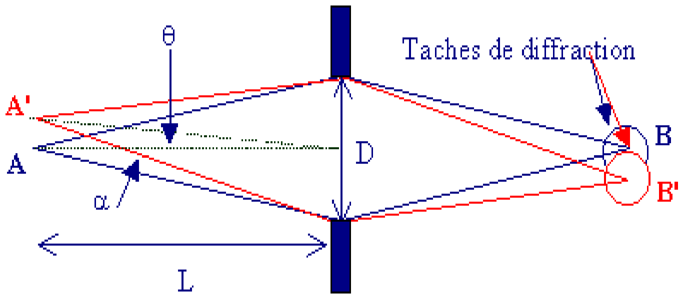


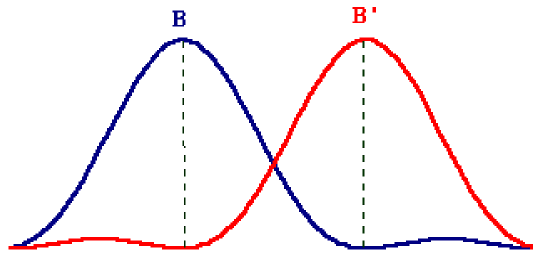
Le premier zéro se trouve pour $\theta = 1{,}22\ \lambda/a$ donc quand le rayon qui passe par le haut de l'ouverture fait un trajet plus long de $1{,}22\ \lambda$ que le rayon passant par le bas.

En pratique, le pouvoir de résolution étant une notion approximative, on peut prendre une différence de λ

3.2 Critère de Rayleigh

On considère que deux points sont discernables si leurs images, élargies par la diffraction due à l'objectif de l'instrument d'optique sont telles que le minimum de l'une est confondu avec le maximum de l'autre. On a alors :





A donne une image centrée en B et A' donne une image B' dont le premier minimum de diffraction est aussi en B.
Ces deux points A et A' sont juste discernables (critère de Rayleigh)

On pose AA' = d et α l'angle sous lequel l'objectif est vu depuis le point A
La différence de marche δ entre les deux rayons extrêmes (en rouge) vaut :
$\delta = ((D/2 + d)^2 + L^2)^{1/2} - ((D/2 - d)^2 + L^2)^{1/2} = (D^2/4 + L^2 + Dd)^{1/2} - (D^2/4 + L^2 - Dd)^{1/2}$ en négligeant d^2
$\delta = (D^2/4 + L^2)^{1/2}((1 + Dd/(D^2/4 + L^2))^{1/2} - (1 - Dd/(D^2/4 + L^2))^{1/2}$
$\delta = (D^2/4 + L^2)^{1/2}(1 + 0{,}5\ Dd/(D^2/4 + L^2) - 1 - 0{,}5\ Dd/(D^2/4 + L^2)$
$\delta = (D^2/4 + L^2)^{1/2}(Dd/(D^2/4 + L^2) = Dd/(D^2/4 + L^2)^{1/2}$ or $D/(D^2/4 + L^2)^{1/2} = 2d \sin(\alpha/2)$
$\delta = 2d \sin(\alpha/2)$
donc d'après le critère de Rayleigh, les deux points seront juste discernables si $2d \sin(\alpha/2) = \lambda$

$\mathbf{d = \lambda/(2 \sin(\alpha/2))}$ α n'est pas très grand donc $2\sin(\alpha/2) = \sin \alpha$

$\mathbf{d = \lambda/ \sin\alpha}$

3.3 Pouvoir de résolution d'un télescope spatial

Dans l'espace, la résolution réelle du télescope n'est pas réduite par les turbulences atmosphériques comme c'est le cas pour les télescopes terrestres non adaptatifs.
$\theta = d/L = \lambda/(L \sin\alpha)$ α est très petit donc $L \sin\alpha = L\,\alpha = D$
$\theta = \lambda/(L \sin\alpha) = \lambda/D$
$\mathbf{\theta = \lambda/D}$
Le télescope Hubble a un diamètre de 2,4 m. On prend une λ moyenne de 500 nm.
On obtient $\theta = 2{,}1.10^{-7}$ rd ce qui correspond à distinguer un cratère de 80 m de diamètre sur la lune.

3.4 Pouvoir de résolution d'un microscope

$d = \lambda/(2 \sin(\alpha/2))$
α est voisin de 60° donc un microscope ne peut pas distinguer un détail plus petit que λ, donc de l'ordre de 1µm

Remarque : On peut augmenter la résolution en diminuant λ , ce qui peut se faire en plongeant l'objectif et la préparation dans un liquide de fort indice de réfraction n. On a alors $\lambda = c/(nf) = \lambda_0/n$ et d est divisé par n. C'est la raison de l'existence d'objectifs dits " à immersion".