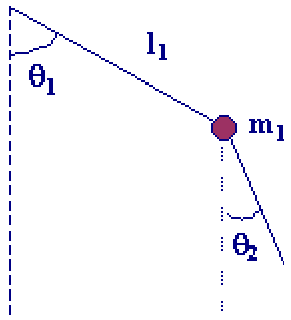
Le pendule double

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



Le pendule double est constitué d'un pendule rigide de longueur l_1 et de masse m_1 auquel est fixé un second pendule rigide de longueur l_2 et de masse m_2

Notations :
$dy/dt = y'$
$d^2y/dt^2 = y''$

2. Le lagrangien

2.1 Équations de Lagrange.

Équation de Newton sur l'axe des x : $\mathbf{m\, d^2x/dt^2 = \Sigma F_{ix} + \Sigma f_{ix}}$

(F_i force dérivant d'un potentiel et f_i autre force)

Les F_i dérivent d'un potentiel : $\Sigma F_{ix} = - dE_p/dx$

(Ep est la somme des énergies potentielles)

$m\, d^2x/dt^2 + dE_p/dx = \Sigma f_{ix}$

$m\, dx'/dt + dE_p/dx = \Sigma f_{ix}$

$m\, dx'/dt = d(d(1/2\, mx'^2)/dx')/dt$

$m\, dx'/dt + dE_p/dx = d(d(1/2\, mx'^2)/dx')/dt - (- dE_p/dx) = d(d(1/2\, mx'^2 - E_p)/dx')/dt - d(1/2\, mx'^2 - E_p)/dx = \Sigma f_{ix}$

$m\, dx'/dt + dE_p/dx = d(d(1/2(mx'^2 + my'^2 + mz'^2) - E_p)/dx')/dt - d(1/2 (mx'^2 + my'^2 + mz'^2) - E_p)/dx = \Sigma f_{ix}$

$m\, dx'/dt + dE_p/dx = d(d(E_c - E_p)/dx')/dt - d(E_c - E_p)/dx = \Sigma f_{ix}$

On pose $\mathbf{L = E_c - E_p}$ **L est le Lagrangien**

On obtient $d(dL/dx')/dt - dL/dx = \Sigma f_{ix}$ et la même chose pour les autres coordonnées

Pour une coordonnée q quelconque on aura $d(dL/dq')/dt - dL/dq = \Sigma f_{iq}$

$f_q\, dq = \mathbf{f.dq} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$ donc $f_q = f_x\, dx/dq + f_y\, dy/dq + f_z\, dz/dq$

$\mathbf{d(dL/dq')/dt - dL/dq = \Sigma(f_{ix}\, dx_i/dq + f_{iy}\, dy_i/dq + f_{iz}\, dz_i/dq)}$

(x_i, y_i et z_i étant les coordonnées du point d'application de f_i)

Pour un système conservatif, les équations de Lagrange deviennent :

$$\mathbf{d(dL/dq')/dt - dL/dq = 0}$$

Pour un pendule simple, on aura :

$E_c = 1/2\, mv^2 = 1/2\, ml^2\theta'^2$ et $E_p = - mgl \cos\theta$ (l'altitude nulle est sur l'axe)

$x = l \sin\theta$ $y = - l \cos\theta$ $dx/d\theta = l \cos\theta$ et $dy/d\theta = l \sin\theta$

$T_x = - T \sin\theta$ et $T_y = T \cos\theta$

$d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = T_x\, dx/d\theta + T_y\, dy/d\theta = - T\, l \sin q \cos\theta + T\, l \cos\theta \sin\theta = 0$

$d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = 0$ (Le système est conservatif)

$L = 1/2\, ml^2\theta'^2 + mgl \cos\theta$

$dL/d\theta' = ml^2\theta'$ $d(dL/d\theta')/dt = ml^2\theta''$

dL/dθ = - mgl sinθ
d(dL/dθ')/dt - dL/dθ = ml²θ" + mgl sinθ = 0
θ" + g/l sinθ = 0 On obtient bien l'équation différentielle du pendule simple

Remarque : L'intérêt de cette approche est d'obtenir les équations du mouvement sans avoir à déterminer les expressions des tensions qui sont difficiles à calculer quand le système est complexe, ce qui est le cas du pendule double.

2.2 Le principe de moindre action pour un système conservatif

L'action S est l'intégrale du lagrangien entre l'instant de départ et l'instant d'arrivée :

$$S = \int_{t1}^{t2} L(x, x')\, dt$$

Cette action doit être minimale, c'est le principe de moindre action, donc si on modifie légèrement, au premier ordre, L, S ne doit pas varier.
On remplace x par x + η on a alors L(x + η, x' + η') = L(x, x') + ηdL/dx + η' dL/dx' + termes d'ordre plus élevé.
D'après le principe de moindre action :

$$S = \int_{t1}^{t2} L(x + \eta, x' + \eta')\, dt = \int_{t1}^{t2} L(x, x')\, dt$$

donc

$$\int_{t1}^{t2} (\eta dL/dx + \eta' dL/dx')dt = 0$$ On intègre par parties. Il faut que $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$

$$\int_{t1}^{t2} \eta(dL/dx - d(dL/dx')/dt)\, dt = 0$$ Cette relation est vraie si **d(dL/dx')/dt - dL/dx = 0**

L'équation de Lagrange pour un système conservatif, est donc équivalente au principe de moindre action.

3. Le pendule double sans frottement.

3.1 Approche Newtonienne.

Pendule 2 : La masse m_2 subit son poids $m_2\mathbf{g}$ et la tension $\mathbf{T_2}$ du pendule 2
L'axe O_2 du pendule 2 est accéléré avec l'accélération $\mathbf{a_1}$ du pendule1, donc le référentiel n'est pas galiléen. Dans ces conditions, on peut appliquer les équations de Newton, à condition d'ajouter une pseudo-force $\mathbf{f} = - m_2\, \mathbf{a_1}$ à la masse m_2

$\mathbf{O_1M_2 = O_1O_2 + O_2M_2}$ donc $d^2\mathbf{O_1M_2}/dt^2 = d^2\mathbf{O_1O_2}/dt^2 + d^2\mathbf{O_2M_2}/dt^2 = \mathbf{a_1 + a_2}$
$m_2\, d^2\mathbf{O_1M}/dt^2 = \mathbf{\Sigma\, F} = m_2\, \mathbf{a_1} + m_2\, \mathbf{a_2}$ donc on obtient : $m_2\, \mathbf{a_2} = m_2\, \mathbf{g} + \mathbf{T}_2 - m_2\, \mathbf{a_1}$
En passant à l'expression de la loi de Newton pour un système en rotation, on obtient ainsi :
$J_2\, \theta_2" = m_2\, l_2^2\, \theta_2" = M(m_2\, \mathbf{g}) + M(\mathbf{T}_2) - M(m_2\, \mathbf{a_1}) = M(m_2\, \mathbf{g}) - M(m_2\, \mathbf{a_{1t}}) - M(m_2\, \mathbf{a_{1n}})$
$(M(\mathbf{T}_2) = 0)$

a_{1t} et a_{1n} sont les composantes tangentielles et normales de l'accélération de m_1
M(**F**) est le moment de **F** par rapport à l'axe du pendule 2
Le pendule 1 a un mouvement circulaire donc :
$a_{1t} = l_1\, \theta_1"$ et $a_{1n} = l_1\, \theta_1'^2$
$M(\mathbf{m_2\, a_{1t}}) = - m_2\, l_1\, \theta_1"\, l_2 \cos(\theta_1-\theta_2)$ et $M(\mathbf{m_2\, a_{1n}}) = m_2\, l_1\, \theta_1'^2\, l_2 \sin(\theta_1-\theta_2)$
et $M(\mathbf{m_2\, g}) = - m_2\, g\, l_2 \sin\theta_2$

$m_2\, l_2^2\, \theta_2'' = -m_2\, g\, l_2 \sin\theta_2 - m_2\, l_1 l_2\, \theta_1'' \cos(\theta_1-\theta_2) + m_2\, l_1 l_2\, \theta_1'^2 \sin(\theta_1-\theta_2)$

$$\mathbf{l_2\theta_2'' + l_1\,\theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1\,\theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g \sin\theta_2 = 0 \quad (1)}$$

Pendule 1 : La masse m_1 subit son poids $m_1\mathbf{g}$, la tension $\mathbf{T_1}$ du pendule 1 et la tension $\mathbf{T_2}$ du pendule 2

$J_2\,\theta_2'' = m_1\, l_1^2\, \theta_1'' = M(\mathbf{m_1\, g}) + M(\mathbf{T_1}) + M(\mathbf{T_2}) = M(\mathbf{m_1\, g}) + M(\mathbf{T_2})$

$J_2\,\theta_2'' = -m_1 g\, l_1 \sin\theta_1 - T_2\, l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \qquad (M(T_1) = 0)$

Sur la masse m_2, la deuxième loi de Newton donne $m\,\mathbf{a_2} = m_2\,\mathbf{g} + \mathbf{T_2} - m_2\,\mathbf{a_1}$

En projetant sur l'axe normal qui porte T_2, on obtient

$m_2\, a_{2n} = m_2\, g_n + T_2 - m_2\, a_{1n} = m_2\, g_n + T_2 - (m_2\, a_{1t})_n - (m_2\, a_{1t})_n$

$m_2\, a_{2n} = -m_2\, g \cos\theta_2 + T_2 + m_2\, l_1\, \theta_1'^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\, l_1\, \theta_1'' \sin(\theta_1 - \theta_2)$

On a un mouvement circulaire donc : $m_2\, a_{2n} = m_2\, l_2\, \theta_2'^2$

$m_2\, l_2\, \theta_2'^2 = -m_2\, g \cos\theta_2 + T_2 + m_2\, l_1\, \theta_1'^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\, l_1\, \theta_1'' \sin(\theta_1 - \theta_2)$

$T_2 = m_2\, l_2\, \theta_2'^2 + m_2\, g \cos\theta_2 + m_2\, l_1\, \theta_1'^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\, l_1\, \theta_1'' \sin(\theta_1 - \theta_2)$

$m_1\, l_1^2\, \theta_1'' = -m_1 g\, l_1 \sin\theta_1 - T_2\, l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)$

$m_1\, l_1^2\, \theta_1'' = -m_1 g\, l_1 \sin\theta_1 - m_2\, l_2 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_2'^2 - m_2\, g\, l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_2 -$
$m_2\, l_1 l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_1'^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\, l_1\, l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_1'' \sin(\theta_1 - \theta_2)$

$m_1\, l_1 \theta_1'' + m_2\, l_1 \sin^2(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_1'' = -m_2\, l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_1'^2 -$
$m_2\, l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_2'^2 - m_1\, g \sin\theta_1 - m_2\, g \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_2$

$$\mathbf{\theta_1'' = (-m_2\, l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_1'^2 - m_2\, l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_2'^2 - m_1 g \sin\theta_1 - m_2\, g \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_2)/(m_1\, l_1 + m_2\, l_1 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}$$

En reportant θ_1'' dans (1), on obtient :

$\theta_2'' = ((m_1 + m_2) l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_1'^2 + m_2\, l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_2'^2 +$
$m_2\, g \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_1 + m_1\, g(\cos(\theta_1 - \theta_2) \sin\theta_1 - \sin\theta_2)) / (m_1 l_2 + m_2\, l_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))$

$\cos(\theta_1 - \theta_2) \sin\theta_1 - \sin\theta_2 = \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_1$

(Ca se démontre facilement... avec un peu d'astuce) donc :

$$\mathbf{\theta_2'' = ((m_1 + m_2)\, l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_1'^2 + m_2\, l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)\, \theta_2'^2 + (m_1 + m_2)\, g \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_1)/(m_1 l_2 + m_2\, l_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))}$$

3.2 Approche Lagrangienne.

3.2.1 Expression du lagrangien.

Les variables sont θ_1 et θ_2

$E_c = 1/2\, m_1\, v_1^2 + 1/2\, m_2\, v_2^2$

$v_1 = l_1\theta_1' \qquad v_{2r} = l_2\theta_2'$ et $\mathbf{v_2 = v_1 + v_{2r}}$ **(relation vectorielle)**

$v_2^2 = v_1^2 + v_{2r}^2 + 2\, v_1\, v_{2r} \cos(\theta_1 - \theta_2) = l_1^2\theta_1'^2 + l_2^2\theta_2'^2 + 2\, l_1 l_2 \theta_1'\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$E_c = 1/2\, m_1\, l_1^2\theta_1'^2 + 1/2\, m_2\, (l_1^2\theta_1'^2 + l_2^2\theta_2'^2 + 2\, l_1 l_2 \theta_1'\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2))$

$E_c = 1/2\, (m_1 + m_2)\, l_1^2\theta_1'^2 + 1/2\, m_2\, (l_2^2\theta_2'^2 + 2\, l_1 l_2 \theta_1'\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2))$

$Ep = -m_1 g\, l_1 \cos\theta_1 - m_2 g\, (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2) = -(m_1 + m_2) g\, l_1 \cos\theta_1 - m_2 g\, l_2 \cos\theta_2$

(l'altitude nulle est sur l'axe)

$L = 1/2\ (m_1 + m_2)\ l_1^2\theta_1'^2\ + 1/2\ m_2\ (l_2^2\theta_2'^2\ +\ 2\ l_1 l_2\theta_1'\theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2)) +$
$(m_1 + m_2)g\ l_1\cos\theta_1 +\ m_2 g\ l_2\cos\theta_2$

3.2.2 Équations différentielles.

Équations de Lagrange du système (le système est conservatif) :
$d(dL/d\theta_1')/dt - dL/d\theta_1 = 0$
$d(dL/d\theta_2')/dt - dL/d\theta_2 = 0$

$L = 1/2\ (m_1 + m_2)\ l_1^2\theta_1'^2\ + 1/2\ m_2\ (l_2^2\theta_2'^2\ +\ 2\ l_1 l_2\ \theta_1'\ \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2)) + (m_1 + m_2)g l_1\cos\theta_1$
$+ m_2 g\ l_2\cos\theta_2$
$dL/d\theta_1'\ =\ (m_1 + m_2)\ l_1^2\theta_1' + m_2\ l_1 l_2\ \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2)$
$d(dL/d\theta_1')/dt=(m_1 + m_2)l_1^2\theta_1''+m_2 l_1 l_2\theta_2''\cos(\theta_1 - \theta_2)- m_2 l_1 l_2\theta_2'\sin(\theta_1- \theta_2)\ (\theta_1'- \theta_2')$
$dL/d\theta_1\ = - m_2\ l_1 l_2\ \theta_1'\ \theta_2' \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)g l_1\sin\theta_1$
$d(dL/d\theta_1')/dt - dL/d\theta_1 = (m_1 + m_2)\ l_1^2\theta_1'' +\ m_2\ l_1 l_2\ \theta_2'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\ l_1 l_2\ \theta_2' \sin(\theta_1 - \theta_2)$
$(\theta_1' - \theta_2')+m_2 l_1 l_2\theta_1'\theta_2'\sin(\theta_1- \theta_2) + (m_1+m_2)g l_1\sin\theta_1= (m_1+ m_2)\ l_1^2\theta_1'' +$
$m_2\ l_1 l_2\ \theta_2'' \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\ l_1 l_2\ \theta_2'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g l_1\sin\theta_1 = 0$
$(m_1 + m_2)\ l_1\theta_1''+m_2\ l_2\ \theta_2''\cos(\theta_1 - \theta_2)+m_2\ l_2\ \theta_2'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) +(m_1 + m_2)g \sin\theta_1 = 0\ (1)$

$dL/d\theta_2'\ =\ m_2\ l_2^2\theta_2' + m_2\ l_1 l_2\ \theta_1' \cos(\theta_1 - \theta_2)$
$d(dL/d\theta_2')/dt\ = m_2\ l_2^2\theta_2'' +\ m_2\ l_1 l_2\ \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\ l_1 l_2\ \theta_1' \sin(\theta_1 - \theta_2)\ (\theta_1' - \theta_2')$
$dL/d\theta_2\ =\ m_2\ l_1 l_2\ \theta_1'\ \theta_2' \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2\ g l_2\sin\theta_2$
$d(dL/d\theta_2')/dt - dL/d\theta_2 = m_2\ l_2^2\theta_2'' +\ m_2\ l_1 l_2\ \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\ l_1 l_2\ \theta_1' \sin(\theta_1 - \theta_2)$
$(\theta_1' - \theta_2')\ - m_2\ l_1 l_2\ \theta_1'\ \theta_2' \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2\ g l_2\sin\theta_2\ = m_2\ l_2^2\theta_2'' +\ m_2\ l_1 l_2\ \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) -$
$m_2\ l_1 l_2\ \theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2\ g l_2\sin\theta_2 = 0$
$l_2\theta_2'' +\ l_1\ \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) - l_1\ \theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) +\ g \sin\theta_2 = 0 \qquad (2)$

De (2), on déduit :
$l_2\theta_2'' = -\ l_1\ \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) +\ l_1\ \theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\ -\ g \sin\theta_2 = 0$
On reporte dans (1)
$\theta_1'' = (- m_2\ l_1\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)\ \theta_1'^2 - m_2\ l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\ \theta_2'^2 - m_1 g \sin\theta_1\ - m_2\ g \sin\theta_1\ +$
$m_2\ g \cos(\theta_1 - \theta_2)\sin\theta_2\ )/(m_1 l_1 + m_2\ l_1\ \sin^2(\theta_1 - \theta_2))$
Il se trouve que $\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin\theta_2\ - \sin\theta_1\ = - \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_2$
(Ca se démontre facilement... avec un peu d'astuce)
$\theta_1'' = (- m_2\ l_1\sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)\ \theta_1'^2 - m_2\ l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\ \theta_2'^2 - m_1 g \sin\theta_1 -$
$m_2\ g \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_2)/(m_1 l_1 + m_2\ l_1 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))$

De (2), on déduit :
$l_1\ \theta_1'' \cos(\theta_1 - \theta_2) = - l_2\theta_2'' +\ l_1\ \theta_1'^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\ -\ g \sin\theta_2 = 0$
On reporte dans (1)
$\theta_2'' = ((m_1 + m_2)l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\ \theta_1'^2\ +\ m_2\ l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1 - \theta_2)\ \theta_2'^2\ +$
$m_2\ g \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_1\ +\ m_1 g(\cos(\theta_1 - \theta_2) \sin\theta_1 - \sin(\theta_1 - \theta_2)))/(m_1 l_2\ + m_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))$
Il se trouve que $\cos(\theta_1 - \theta_2)\sin\theta_1 - \sin\theta_2\ = \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_1$
(Ca se démontre comme précédemment)
$\theta_2'' = ((m_1 + m_2)\ l_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)\ \theta_1'^2\ + m_2\ l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\cos(\theta_1-\theta_2)\ \theta_2'^2 +$
$(m_1+ m_2)\ g \sin(\theta_1 - \theta_2) \cos\theta_1)/(m_1 l_2 + m_2\ l_2 \sin^2(\theta_1 - \theta_2))$

4. Le pendule à entraînement circulaire uniforme

4.1 Expression du lagrangien.

La variable est θ_2 $\quad\quad$ $\theta_1' = \omega$ $\quad\quad$ $\theta_1 = \omega t$

$E_c = 1/2\ m_2 v_2^2$

$v_1 = l_1\omega$ $\quad\quad$ $v_{2r} = l_2\theta_2'$ $\quad$ et $\quad$ $\mathbf{v_2 = v_1 + v_{2r}}$

$v_2^2 = v_1^2 + v_{2r}^2 + 2 v_1 v_{2r} \cos(\theta_1 - \theta_2) = l_1^2\omega^2 + l_1^2\theta_2'^2 + 2\ l_1 l_2\omega\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$E_c = 1/2\ m_1 l_1^2\omega^2 + 1/2\ m_2 (l_1^2\omega^2 + l_1^2\theta_2'^2 + 2\ l_1 l_2\omega\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2))$

$E_c = 1/2\ (m_1 + m_2)\, l_1^2\omega^2 + 1/2\ m_2 (l_1^2\theta_2'^2 + 2\ l_1 l_2\omega\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2))$

$Ep = - m_1 g\, l_1\cos\theta_1 - m_2 g\, (l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) = - (m_1 + m_2) g\, l_1\cos\theta_1 - m_2 g\, l_2\cos\theta_2$

(l'altitude nulle est sur l'axe)

$\mathbf{L = 1/2\ (m_1 + m_2)\, l_1^2\omega^2 + 1/2\ m_2 (l_1^2\theta_2'^2 + 2\ l_1 l_2\omega\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2)) +}$

$\mathbf{(m_1 + m_2) g\, l_1\cos\theta_1 + m_2 g\, l_2\cos\theta_2}$

4.2 Équation différentielle.

Équation de Lagrange du système (le système est conservatif) :
$d(dL/d\theta_2')/dt - dL/d\theta_2 = 0$

$L = 1/2\ (m_1 + m_2)\, l_1^2\omega^2 + 1/2\ m_2 (l_1^2\theta_2'^2 + 2\ l_1 l_2\omega\, \theta_2' \cos(\theta_1 - \theta_2)) +$

$(m_1 + m_2) g\, l_1\cos\theta_1 + m_2 g\, l_2\cos\theta_2$

$dL/d\theta_2' = m_2 l_2^2\theta_2' + m_2 l_1 l_2\, \omega \cos(\theta_1 - \theta_2)$

$d(dL/d\theta_2')/dt = m_2 l_2^2\theta_2'' - m_2 l_1 l_2\, \omega \sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega - \theta_2')$

$dL/d\theta_2 = m_2 l_1 l_2\, \omega\, \theta_2' \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 g l_2 \sin\theta_2$

$d(dL/d\theta_2')/dt - dL/d\theta_2 = m_2 l_2^2\theta_2'' - m_2 l_1 l_2\, \omega \sin(\theta_1 - \theta_2)(\omega - \theta_2') - m_2 l_1 l_2\, \omega\theta_2' \sin(\theta_1 - \theta_2) +$

$m_2 g l_2 \sin\theta_2 = m_2 l_2^2\theta_2'' - m_2 l_1 l_2\, \omega^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g\, l_2\sin\theta_2 = 0$

$m_2 l_2^2\theta_2'' - m_2 l_1 l_2\, \omega^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + m_2 g\, l_2\sin\theta_2 = 0$

$$\boldsymbol{\theta_2'' + g/l_2 \sin\theta_2 = l_1/l_2\, \omega^2 \sin(\omega t - \theta_2)}$$

4.3 Solution pour les petits angles.

θ petit donc $\sin\theta = \theta$ $\quad$ et $\quad$ $\sin(\omega t - \theta) = \sin(\omega t)$ $\quad$ donc

$\theta'' + g/l_2\, \theta = l_1/l_2\, \omega^2 \sin(\omega t)$

La solution stationnaire est de la forme $\theta = \theta_m \sin(\omega t)$ $\quad\quad$ on pose $\omega_0^2 = g/l_2$

$- \omega^2 \theta_m \sin(\omega t) + \omega_0^2 \theta_m \sin(\omega t) = l_1/l_2\, \omega^2 \sin(\omega t)$

$\theta_m = l_1/l_2\, \omega^2 /(\omega_0^2 - \omega^2) = l_1/(l_2 (\omega_0^2/\omega^2 - 1))$

$$\boldsymbol{\theta = l_1/(l_2 (\omega_0^2/\omega^2 - 1)) \sin(\omega t)}$$

C'est une équation de résonance classique sans frottement. Le système entre en résonance pour ω voisin de ω_0

Si on veut tenir compte du frottement, on peut ajouter un terme de frottement laminaire $\gamma\, \theta'$ (valable seulement si $l_1 << l_2$ et θ petit), on a alors :

$\theta'' + \gamma\, \theta' + \omega_0^2\, \theta = l_1/l_2\, \omega^2 \sin(\omega t)$ dont la solution stationnaire est

$\theta = \theta_m \sin(\omega t - \varphi)$ avec $\boldsymbol{\theta_m = l_1/l_2\ \omega^2 /((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{1/2}}$ $\quad$ **et** $\quad$ $\boldsymbol{\tan\varphi = \gamma\, \omega/(\omega_0^2 - \omega^2)}$

Naturellement, si θ_m devient grand, la théorie simplifiée des petits angles cesse d'être valable..