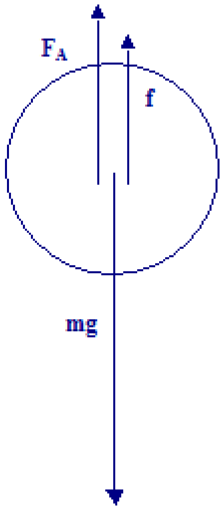
Animation

Mouvement rectiligne freiné

Animation

par Gilbert Gastebois

1. Schéma des forces



Les vecteurs sont notés en gras

ρ : Masse volumique de l'objet

ρ_0 : Masse volumique du fluide

η : Viscosité du fluide

V : Volume de l'objet

Masse de l'objet : $m = \rho V$

Poussée d'Archimède : $F_A = \rho_0 V g$

Frottement fluide : $f = k v^n$

2. Chute d'un corps avec frottement laminaire ($f = k v$)

2.1 Équation différentielle du mouvement

$m \mathbf{a} = \mathbf{mg} + \mathbf{F_A} + \mathbf{f}$

On projette sur un axe vertical Ox pointant vers le bas

$m a_x = mg - F_A - f = mg - F_A - k v_x$

$a_x = dv_x/dt$ donc $m\, dv_x/dt = mg - F_A - k v_x$

$\mathbf{m/k\ dv_x/dt + v_x = (mg - F_A)/k}$

2.2 Solution pour la vitesse.

Solution générale : $v_x = (mg - F_A)/k + A \exp(- t/\tau)$

Conditions initiales : A $t = 0$, $v_x = v_0$ donc $A = v_0 - (mg - F_A)/k$

$\mathbf{v_x = (mg - F_A)/k\,(1 - \exp(- t/\tau)) + v_0 \exp(- t/\tau)}$ $\qquad \boldsymbol{\tau = m/k}$

Pour une bille sphérique de rayon R, $m = 4/3\pi R^3 \rho$ $\quad F_A = 4/3\pi R^3 \rho_0 g$ et $k = 6\pi \eta R$

$v_x = 2R^2(\rho - \rho_0)g/(9\eta) \quad (1 - \exp(- 9\eta\, t/(2R^2\rho))) + v_0 \exp(- t/ 9\eta\, t/(2R^2\rho))$

2.3 Solution pour le déplacement *x*.

$v_x = dx/dt$ donc

$x = (mg - F_A)/k\,(t + \tau \exp(- t/\tau) - \tau v_0 + C)$ $\qquad \tau = m/k$

Conditions initiales : A $t = 0$, $x = 0$ donc $C = v_0 - (mg - F_A)/k$

$\mathbf{x = (mg - F_A)/k\, t + \tau\,(v_0 - (mg - F_A)/k)\,(1 - \exp(- t/\tau))}$ $\qquad \boldsymbol{\tau = m/k}$

Pour une bille sphérique de rayon R, $m = 4/3\pi R^3 \rho$ $F_A = 4/3\pi R^3 \rho_0 g$ et $k = 6\pi \eta R$

$x = 2R^2(\rho - \rho_0)g/(9\eta)\ t + 2R^2\rho/(9\eta)\ (v_0 - 2R^2(\rho - \rho_0)g/(9\eta))\ (1 - \exp(-9\eta\ t/(2R^2\rho)))$

3. Chute d'un corps avec frottement quelconque ($\mathbf{f = k\ v^n}$)

3.1 Équation différentielle du mouvement

$m\ \mathbf{a} = \mathbf{mg} + \mathbf{F_A} + \mathbf{f}$

On projette sur un axe vertical Ox pointant vers le bas

$m\ a_x = mg - F_A - f = mg - F_A - k\ v_x^{\ n}$

$a_x = dv_x/dt$ donc $m\ dv_x/dt = mg - F_A - k\ v_x^{\ n}$

$dv_x/dt = -k/m\ v_x^{\ n} + g - F_A/m$

$\mathbf{dv_x/dt = -k/m\ v_x^{\ n} + (1 - \rho_0/\rho)g}$

3.2 Méthode d'Euler.

On a une fonction u(t)
du(t)/dt peut être approximée par $du(t)/dt = (u(t + \Delta t) - u(t))/\Delta t$ d'où
$u(t + \Delta t) = u(t) + du(t)/dt\ \Delta t$ Δt est appelé le pas de la méthode. Plus il est petit et plus la méthode sera précise.
On obtient :
$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\ \Delta t$ et
$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t)\ \Delta t$
a(t) est donnée par l'équation différentielle.

Méthode améliorée :
On peut obtenir de bien meilleures valeurs de x à l'instant $t + \Delta t$, en prenant la valeur de v à l'instant "milieu" $t + \Delta t/2$, plutôt qu'au début (à l'instant t)
$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t + \Delta t/2)\ \Delta t$
La première valeur de v étant obtenue par $v(\Delta t/2) = v(0) + a(0)\ \Delta t/2$
On trace un tableau (Tableau d'Euler)

t	Equation différentielle $a_x = dv_x/dt = f(v_x)$	v_x	x
0	$a_0 = f(v_0)$	v_0	x_0
$\Delta t/2$	$a_1 = f(v_1)$	$v_1 = v_0 + a_0\ \Delta t/2$	
Δt	$a_2 = f(v_2)$	$v_2 = v_1 + a_1\ \Delta t$	$x_2 = x_0 + v_1\ \Delta t$
$2\ \Delta t$	$a_3 = f(v_3)$	$v_3 = v_2 + a_2\ \Delta t$	$x_3 = x_2 + v_2\ \Delta t$
....	....	....	....
$(n-1)\ \Delta t$	$u'_n = f(u_n)$	$v_n = v_{n-1} + a_{n-1}\ \Delta t$	$x_n = x_{n-1} + v_{n-1}\ \Delta t$

3.3 Solution pour le déplacement *x*.

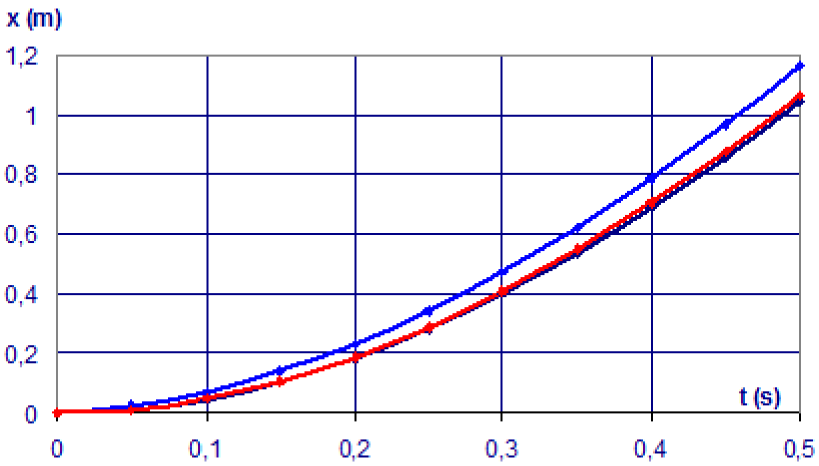
$a_x = dv_x/dt = - k/m\, v_x^{\,n} + (1 - \rho_0/\rho)g$

Il n'y a pas de solution analytique de cette équation, il faut utiliser la méthode d'Euler (améliorée).

$v_x(\Delta t/2) = v_x(0) + a_x(0)\, \Delta t/2$

$v_x(t + \Delta t/2) = v_x(t - \Delta t/2) + a_x(t)\, \Delta t$

$x(t + \Delta t) = x(t) + v(t + \Delta t/2)\, \Delta t$



Equation : $dv_x/dt = 9{,}8 - v_x$ $\quad v_0 = 0$

Pas $\Delta t = 0{,}05$ s

Courbe 1 : Méthode d'Euler brute

Courbe 2 : Méthode d'Euler améliorée

Courbe 3 : valeurs exactes

On voit que la méthode améliorée est bien meilleure et est même excellente compte tenu de la bien trop grande valeur du pas $\Delta t = t_{max}/10$. L'écart n'est que de 2,1% !!

(la méthode brute donne un écart de 11,5%, ce qui n'est pas très bon)

Avec un pas $\Delta t = t_{max}/5000 = 1.10^{-4}$ s, la méthode brute donne un écart de 0,015% et la méthode améliorée un écart de 0,0038%, ce qui est vraiment bon.... Alors prenons $\Delta t = t_{max}/5000000$ et l'écart relatif ne sera plus que de 4.10^{-8} !!