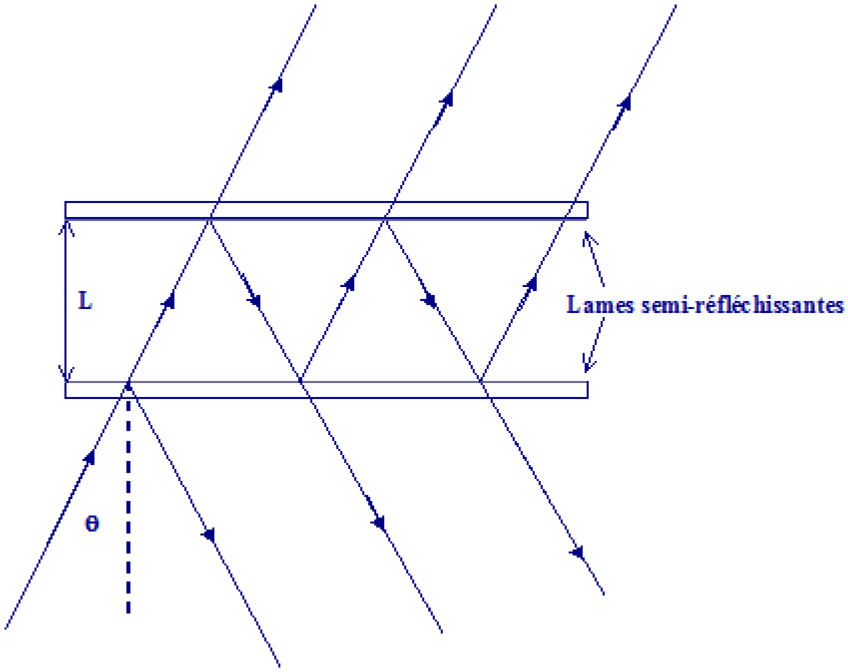
Interféromètre de Fabry-Perot

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



L'interféromètre de Fabry-Perot est constitué de deux lames semi-réfléchissantes parallèles séparées d'une distance L (Le coefficient de réflexion des lames est voisin de 95%)

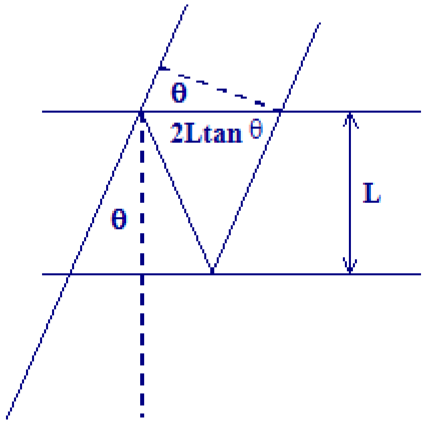
Un rayon qui entre entre les deux lames se réfléchit un très grand nombre de fois avant de sortir.
A chaque réflexion, une portion R de l'intensité est réfléchie et une portion (1 - R) est transmise.

Les rayons qui sortent interfèrent à l'infini ou dans le plan focal d'une lentille.

L'interférence multiple ne peut être constructive que si tous les rayons sont approximativement en phase et ceci d'autant plus que le nombre de rayons est important donc que R est grand.

Les rayons ne sont en phase que pour certains angles θ particuliers qui dépendent de λ et de L

2. Différence de marche entre deux rayons consécutifs



Le premier rayon parcourt $2L\tan\theta\sin\theta$
Le deuxième rayon parcourt $2L/\cos\theta$

La différence de marche entre les deux est donc

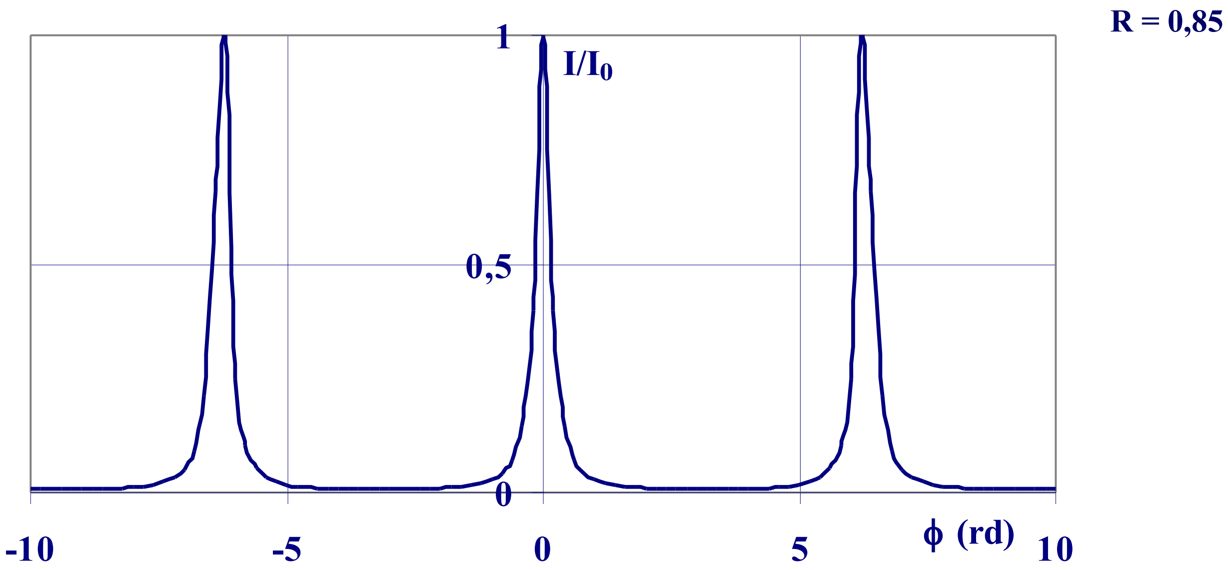
$\delta = 2L/\cos\theta - 2L\tan\theta\sin\theta = 2L/\cos\theta - 2L\sin\theta/\cos\theta \sin\theta$
$\delta = 2L/\cos\theta \,(1 - \sin^2\theta) = 2L\cos\theta$

3. Intensité de la lumière sortante

Soit A_0 l'amplitude de la lumière entrante.
A chaque réflexion l'intensité est multipliée par R donc l'amplitude est multipliée par $R^{1/2}$ et à chaque transmission, l'amplitude est multipliée par $(1 - R)^{1/2}$

Donc après n allers-retours entre les deux lames (et 2 transmissions),
$A_n = (1 - R)\, A_0\, R^n e^{-jn\varphi}$ φ étant le déphasage entre deux rayons sortants successifs.
$\varphi = 2\pi\, \delta/\lambda = 4\pi\, L\cos\theta/\lambda$
$A_n = (1 - R)\, A_0\, R^n e^{-jn\varphi} = (1 - R)\, A_0\, (R\, e^{-j\varphi})^n$
$A = \Sigma A_n = (1 - R)\, A_0\, (1 - R^N e^{-jN\varphi}) / (1 - R\, e^{-j\varphi})$ N est le nombre maximal d'allers-retours, ce nombre étant très grand car L est très petit, on arrondit à :
$A = (1 - R)\, A_0 / (1 - R\, e^{-j\varphi})$
$I = AA^* = (1 - R)^2 A_0^2 /((1 - R\, e^{-j\varphi})\,(1 - R\, e^{j\varphi})) = (1 - R)^2 I_0 /((1 - R(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) + R^2)$ I
$I = (1 - R)^2 I_0 /((1 - 2R\cos\varphi + R^2)$
$I = (1 - R)^2 I_0/((1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2(\varphi/2)) = (1 - R)^2 I_0/((1 - R)^2 + 4R\sin^2(\varphi/2))$
$I = I_0/(1 + 4R/(1 - R)^2 \sin^2(\varphi/2))$

$\mathbf{I = I_0/(1 + 4R/(1 - R)^2 \sin^2(2\pi L\cos\theta/\lambda))}$



4. Positions des franges brillantes

I est maximal quand $\sin(2\pi\ L\cos\theta/\lambda) = 0$, on alors $I = I_0$ La lumière est entièrement transmise même si le coefficient de réflexion avoisine 100% !
Le sinus est nul si $2\pi\ L\cos\theta/\lambda = k\pi$ (k entier)
$\cos\theta = k\lambda/(2L)$ θ est petit donc cosθ est voisin de $1 - \theta^2/2$ et donc $k \sim 2L/\lambda$.
On pose $k_0 = \mathrm{Ent}(2L/\lambda)$ Ent étant la partie entière
$\cos\theta_0 = k_0\lambda/(2L)$
$\cos\theta = (k_0 - n\ )\lambda/(2L) = \cos\theta_0 - n\lambda/(2L)$ n = 0, 1, 2, 3, ...
$\cos\theta = \cos\theta 0 - n\lambda/(2L)$

si θ est petit, cosθ est voisin de $1 - \theta^2/2$ donc
$\theta^2 = \theta_0{}^2 + n\lambda/L$
$\theta = (\theta_0{}^2 + n\ \lambda/L)^{½}$
Exemple: $\lambda = 589$ nm et $L = 50$ µm
$k_0 = 169$ donc $\theta_0 = 9{,}59.10^{-2}$ rd = 5,5 °
θ = 5,5 °, 8,3°, 10,4°, 12,1°, 13,6°.....

Remarque : Comment se peut-il qu'une lumière qui rencontre deux surfaces presque totalement réfléchissantes puisse entièrement traverser l'interféromètre ? On pourrait penser qu'elle ne peut même pas pratiquement entrer entre les deux lames puisqu'elle est quasiment entièrement réfléchie par la première lame... C'est que le rayon subit à chaque réflexion sur la première lame, une transmission vers l'arrière et tous ces rayons interfèrent. Il se trouve que pour les longueurs d'ondes transmises, tous les rayons rétro-diffusés sont en phase entre eux et en opposition de phase avec le premier rayon réfléchi qui n'est pas entré. La somme des amplitudes donne une somme nulle et ainsi, il n'y a pas de lumière réfléchie, elle est donc entièrement transmise. Voir paragraphe 7.

5. Longueurs d'ondes transmises à θ donné

I est maximal quand $\sin(2\pi\ L\cos\theta/\lambda) = 0$, on alors $I = I_0$

Le sin est nul si $2\pi\ L\cos\theta/\lambda = k\ \pi$ (k entier)
$\lambda = 2L\cos\theta/k = 2L\cos\theta/(k_0 + n)$ n = ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
$k_0 = \mathrm{Ent}(2L\cos\theta/\lambda_0) = 2L\cos\theta_0/\lambda_0$
$\lambda = 2L\cos\theta_0/(k_0 + n)$

$k_0 >> n$ donc $\lambda = 2L\cos\theta_0/k_0\ (1 - n/k_0) = 2L\cos\theta_0/k_0 - n\ 2L\cos\theta_0/k_0{}^2 = \lambda_0 - n\ \lambda_0/k_0$
$\lambda = \lambda_0 - n\ \delta\lambda$ avec
$\boldsymbol{\delta\lambda = \lambda_0/k_0 = \lambda_0{}^2/(2L\cos\theta_0)}$

Exemple: $\lambda_0 = 589$ nm, $\theta_0 = 5{,}5°$ et $L = 50\ \mu m$
$k_0 = 169$ $\delta\lambda = 3{,}485$nm
$\lambda = ...$ 578,7 nm 582,1 nm 585,5 nm 589 nm 592,5 nm 596,0 nm 599,6 nm ....

6. Finesse des raies

6.1 Expression de la finesse

La finesse F est par définition le rapport entre l'intervalle $\delta\lambda$ entre deux λ successifs pour le même θ_0 et la largeur $\Delta\lambda$ d'une raie pour $I = I_0/2$

$\delta\lambda = 2L\cos\theta_0/(k_0 - 1) - 2L\cos\theta_0/k_0 = 2L\cos\theta_0(1/(k_0 - 1) - 1) = 2L\cos\theta_0/k_0{}^2$
$(k_0 >> 1)$
$k_0 = 2L\cos\theta_0/\lambda_0$ donc $\delta\lambda = \lambda_0{}^2/(2L\cos\theta_0)$

$I = I_0/2$ si $4R/(1 - R)^2\ \sin^2(2\pi L\cos\theta_0/\lambda) = 1$ donc si $\sin(2\ \pi L\cos\theta_0/\lambda)$
$I = (1 - R)/(2R^{½})$
Quand $I = I_0/2$, par définition $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda/2$ donc sachant que $\Delta\lambda << \lambda_0$
$\sin(2\ \pi L\cos\theta_0/\lambda) = \sin(2\ \pi L\cos\theta_0/(\lambda_0 + \Delta\lambda/2)) = \sin(2\ \pi L\cos\theta_0/\lambda_0\ (1 - \Delta\lambda/(2\lambda_0))) =$
$\sin(\pi L\cos\theta_0\ \Delta\lambda/\lambda_0{}^2)$ car $2\pi L\cos\theta_0/\lambda_0 = k\pi$
$\Delta\lambda << \lambda_0$ donc $\sin(\ \pi L\cos\theta_0\ \Delta\lambda/\lambda_0{}^2) = \pi L\cos\theta_0\ \Delta\lambda/\lambda_0{}^2 = \pi\ L\cos\theta_0\ \Delta\lambda/(2L\cos\theta_0\ \delta\lambda) =$
$\pi\ \Delta\lambda/(2\delta\lambda)$ donc
$\pi\ \Delta\lambda/(2\ \delta\lambda) = (1 - R)/(2R^{½})$
$F = \delta\lambda/\Delta\lambda = \pi R^{½}/(1 - R)$

$\boldsymbol{F = \pi R^{½}/(1 - R)}$ (valable pour R assez grand)

6.2 Pouvoir séparateur de l'interféromètre

Le pouvoir séparateur exprime l'intervalle minimal en longueur d'onde qui peut être observé dans l'interféromètre
On peut considérer que cet écart vaut
$\Delta\lambda = \delta\lambda/F = \lambda_0^2/(2LF\cos\theta_0) \sim \lambda_0^2/(2LF)$ car
θ_0 est petit

$\mathbf{\Delta\lambda = (1 - R)\, \lambda_0^2/(2\pi R^{1/2} L)}$

$\mathbf{PS = \lambda_0/\Delta\lambda = 2\pi R^{1/2} L/((1 - R)\ \lambda_0)}$

Exemple : $\lambda_0 = 589$ nm, $L = 50$ µm et $R = 95\%$
$\Delta\lambda = 0{,}057$ nm PS = 10000 Valeurs qui sont un maximum pour un interféromètre parfait. Les valeurs pratiques sont inférieures, mais restent remarquables.

7. Absence de lumière réfléchie à la résonance

Tous les rayons se trouvant entre les deux lames qui se réfléchissent sur la lame inférieure donnent une composante transmise vers le bas. La situation est l'exact symétrique de la lame supérieure pour laquelle on a : $A = (1 - R)\, A_0 /(1 - Re^{j\varphi})$ (Cf : 3.) et ainsi on a, pour l'amplitude transmise vers le bas :
$A = R^{1/2}\,(1 - R)\, A_0 /(1 - Re^{j\varphi})$ Le facteur $R^{1/2}$ vient du fait que le rayon s'est réfléchi une fois de plus par rapport aux rayons transmis vers le haut.
A la résonance, $\varphi = 2k\pi$ donc $e^{j\varphi} = 1$ et ainsi, $A = R^{1/2}A_0$
Ces rayons interfèrent avec le premier rayon qui s'est réfléchi sur la lame du bas au moment de l'entrée dans l'interféromètre.
Son amplitude vaut $A_1 = R^{1/2}\, A_0\, e^{j\Delta}$
donc $A_t = A + A_1$
Le premier rayon s'est réfléchi sur une limite verre-air, ce qui se fait sans déphasage, tandis que les rayons qui ont pénétré entre les lames se sont réfléchis un nombre impair de fois sur une limite air-verre, ce qui se fait avec un déphasage de π donc à leur sortie, les rayons sont déphasés de π par rapport au rayon réfléchi donc $\Delta = \pi$ et
$A_1 = - R^{1/2}A_0$ donc
$A_t = A + A_1 = R^{1/2}A_0 - R^{1/2}A_0 = 0$
Il n'y a donc aucune lumière réfléchie à la résonance, toute la lumière traverse même si le coefficient de réflexion vaut 99,99%, ce qui n'est vraiment pas intuitif.
En fait, la lumière « s'accumule » entre les deux lames. A la résonance, l'intensité lumineuse entre les lames vaut $I_0/(1 - R)$, ce qui permet d'obtenir I_0 à la sortie.

Remarque pour les puristes : Il est clair, d'après le raisonnement précédent que c'est A qui est déphasé de π et A_1 qui n'est pas déphasé, mais cela ne change rien au résultat.