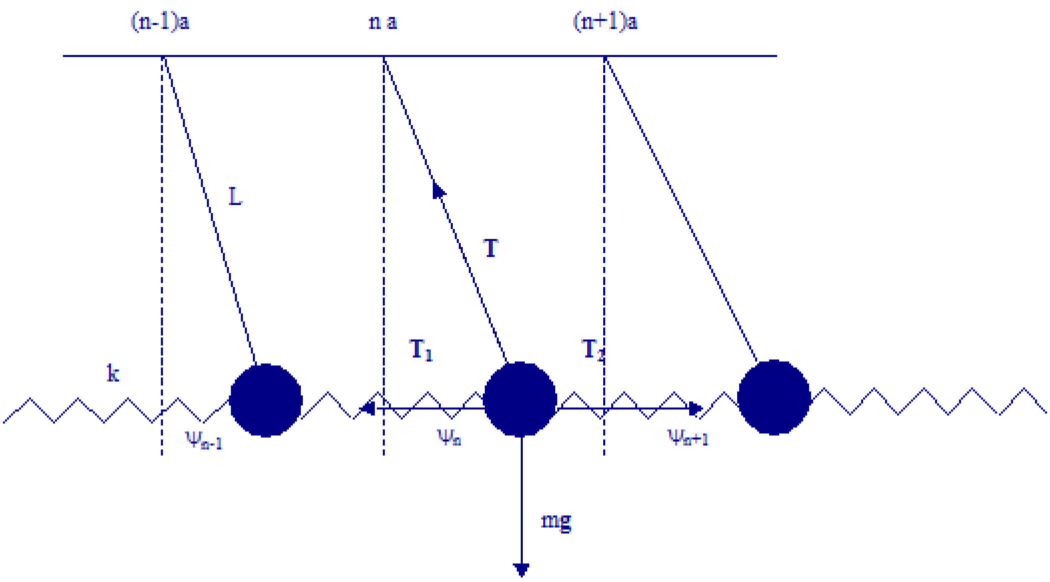
Animation Animation

Les filtres

par Gilbert Gastebois

1. Filtres mécaniques

1.1. Notations



Les vecteurs sont notés en gras

On a N pendules reliés par des ressorts identiques

m	masse de chaque pendule
a	Distance entre les pendules
k	Raideur de chaque ressort
L	Longueur de chaque pendule
L_0	Longueur propre de chaque pendule
ψ_n	Écarts du $n^{ème}$ pendule/équilibre
T1, T2	Tension des ressorts encadrant le $n^{ème}$ ressort
T	Tension du fil des pendules

df/dt est notée f '   et   d²f/dt² est notée f "

1.2. Étude du mouvement du $n^{ème}$ pendule.

1.2.1 Équation différentielle du mouvement pour les petits angles

$m\,\mathbf{a_n} = \mathbf{T} + \mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} + m\,\mathbf{g}$

On projette sur un axe horizontal Ox pointant vers la droite

$m\,a_n = m\,\psi_n'' = -T\,\psi_n/L - T_1 + T_2$

$T_1 = k(\,a + \psi_n - L_0 - (\,a + \psi_{n-1} - L_0)) \;=\; k(\,\psi_n - \psi_{n-1})$

$T_2 = k(\,a + \psi_{n+1} - L_0 - (\,a + \psi_n - L_0)) \;=\; k(\,\psi_{n+1} - \psi_n\,)$

$T = mg$ (A cause du petit angle d'oscillation)

$m\, a_n = m\, \psi_n'' = -\, mg\, x_n/L - k(2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$

$\boldsymbol{\psi_n'' = -g/L\ \psi_n - k/m\ (2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})}$ **On pose** $\omega_0^2 = g/L$ **et** $\omega_c^2 = 4k/m$

$$\psi_n'' = -\omega_0^2\ \psi_n - \omega_c^2/4\ (2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$$

1.2.2 Solution pour les petits déplacements.

On cherche une solution du type $\psi_n = A\, e^{j\omega t}\ e^{kx}$

$x_n = n\, a$ donc $\psi_n = A\, e^{j\omega t}\ e^{kna}$

$-\omega^2 A\, e^{j\omega t}\ e^{kna} = -\omega_0^2\ A\, e^{j\omega t}\ e^{kna} - \omega_c^2/4\ (2A\, e^{j\omega t}\ e^{kna} - A\, e^{j\omega t}\ e^{k(n-1)a} - A\, e^{j\omega t}\ e^{k(n+1)a})$

$-\omega^2 e^{kna} = -\omega_0^2\, e^{kna} - \omega_c^2/4\,(2\, e^{kna} - e^{k(n-1)a} - e^{k(n+1)a}) = -\omega_0^2 - \omega_c^2/4\,(2 - e^{-ka} - e^{ka})\, e^{kna}$

$\boldsymbol{\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c^2/2\ (1 - (e^{ka} + e^{-ka})/2)}$ **Valable pour** $\omega <= (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

$(e^{ka} + e^{-ka})/2$ ne peut pas être inférieur à -1, même si k est imaginaire, donc si $\omega > (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$, il faut que l'oscillation des pendules successifs soient en opposition de phase :

$\psi_{n-1} = -A\, e^{j(\omega t - k(n-1)a)}$

$\psi_n = A\, e^{j(\omega t - kna)}$

$\psi_n = -A\, e^{j(\omega t - k(n+1)a)}$

$-\omega^2\ e^{kna} = -\omega_0^2\ e^{kna} - \omega_c^2/4\ (2\, e^{kna} + e^{k(n-1)a} + e^{k(n+1)a})$

$-\omega^2\ e^{kna} = -\omega_0^2 - \omega_c^2/4\ (2 + e^{-ka} + e^{ka})\, e^{kna}$

$\boldsymbol{\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c^2/2\ (1 + (e^{ka} + e^{-ka})/2)}$ **Valable pour** $\omega > (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

- Cas où $\boldsymbol{\omega < \omega_0}$

$\omega < \omega_0$ donc $(e^{ka} + e^{-ka})/2 > 1$ donc k réel et $(e^{ka} + e^{-ka})/2 = \mathrm{ch}\, ka$

$\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c^2/2\ (1 - \mathrm{ch}\, ka) = \omega_c^2/2\ (2\, \mathrm{sh}^2\, ka/2) = \omega_c^2\, \mathrm{sh}^2\, ka/2$

$\boldsymbol{\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2\, \mathrm{sh}^2\, ka/2}$ (Équation de dispersion pour $\omega <= \omega_0$)

$k = -2\ \mathrm{arcsh}\,((\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}/\omega_c)/a < 0$ On pose $\kappa = -k$

$\psi_n = A\, e^{-\kappa na}\ \cos(\omega\, t)$

L'amplitude décroît exponentiellement donc l'oscillation ne se transmet pas quand la pulsation est inférieure à ω_0

Le coefficient de transmission est $T = \psi_N / \psi_0 = e^{-\kappa Na} = \exp(-2\, N\, \mathrm{arcsh}\,((\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}/\omega_c))$

$\omega <= \omega_0$ donc κa est compris entre $2\ \mathrm{arcsh}\,(\omega_0/\omega_c)$ et 0

- Cas où $\boldsymbol{\omega > (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}}$

$\omega > (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$ donc $(e^{ka} + e^{-ka})/2 > 1$ donc k réel et $(e^{ka} + e^{-ka})/2 = \text{ch } ka$

$\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c^2/2 \ (1 + \text{ch } ka) = \omega_c^2/2 \ (2 \text{ ch}^2 \ ka/2) = \omega_c^2 \text{ ch}^2 \ ka/2$

$\boldsymbol{\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2 \text{ ch}^2 \ ka/2}$ (Équation de dispersion pour $\omega >= (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$)

$k = -2 \text{ arcch } ((\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}/\omega_c)/a < 0$ (le signe + n'est pas physique) On pose $\kappa = -k$

$\psi_n = A\, e^{-\kappa n a} \cos(\omega t)$

L'amplitude décroît exponentiellement donc l'oscillation ne se transmet pas quand la pulsation est supérieure à $(\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

Le coefficient de transmission est $T = \boldsymbol{\psi_N / \psi_0} = e^{-\kappa N a} = \exp(-2 N \text{ arcch } ((\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}/\omega_c))$

$\omega > \boldsymbol{(\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}}$ donc κa est compris entre 0 et l'infini.

- **Cas où $\boldsymbol{\omega_0 <= \omega <= (\omega_0 + \omega_c^2)^{1/2}}$**

$\omega_0 <= \omega <= (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$ donc k est imaginaire pur $k = j\, k$ donc

$(e^{jka} + e^{-jka})/2 = \cos ka$

$\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c/2 \ (1 - \cos ka) = \omega_c^2/2 \ (2 \sin^2 ka/2) = \omega_c^2 \sin^2 ka/2$

$\boldsymbol{\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c^2 \sin^2 ka/2}$ (Équation de dispersion pour $\omega_0 < \omega < (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$)

$k = 2 \arcsin ((\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}/\omega_c)/a < 0$

$\boldsymbol{\psi_n} = A \cos(\omega t - k n a)$ Onde de vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$

La vibration est parfaitement transmise sous forme d'une onde, on a donc un filtre passe-bande entre les pulsations ω_0 et $(\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

Le coefficient de transmission est $T = \boldsymbol{\psi_N / \psi_0} = 1$

$\omega_0 < \omega < (\omega_0 + \omega_c^2)^{1/2}$ donc ka est compris entre 0 et π.

Si ka est petit ($\lambda >> a$), $\sin ka/2 = ka/2$ et $\omega^2 - \omega_0^2 = \omega_c^2/4\, k^2 a^2$ ou $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2/4\, a^2 k^2$

1.2.3 Équation de Klein-Gordon

Dans le cas général on a : $\psi_n'' = -\omega_0^2\, \psi_n - \omega_c^2/4\ (2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1})$

Si $\lambda >> a$ ψ varie régulièrement, on peut donc prendre $\psi_n = \psi(t, x)$ $\psi_{n+1} = \psi(t, x+a)$

$\psi_{n-1} = \psi(t, x-a)$

$\psi_{n+1} = \psi(t, x+a) = \psi(t, x) + a\, \delta\psi(t, x)/\delta x + a^2/2\, \delta^2\psi(t, x)/\delta x^2$

$\psi_{n-1} = \psi(t, x-a) = \psi(t, x) - a\, \delta\psi(t, x)/\delta x + a^2/2\, \delta^2\psi(t, x)/\delta x^2$

$2\psi_n - \psi_{n-1} - \psi_{n+1} = -a^2\, \delta^2\psi(t, x)/\delta x^2$

$\delta^2\psi(t, x)/\delta t^2 = -\omega_0^2\, \psi(t, x) + a^2 \omega_c^2/4\, \delta^2\psi(t, x)/\delta x^2$

$\delta^2\psi(t, x)/\delta t^2 = -\omega_0^2\, \psi(t, x) + a^2 \omega_c^2/4\, \delta^2\psi(t, x)/\delta x^2$ a $\omega_c/2$ a les dimensions d'une vitesse, on pose $c = a\, \omega_c/2$

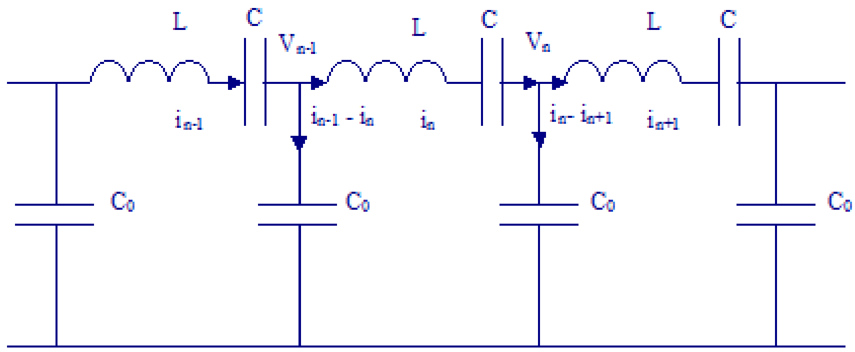
$\boldsymbol{\delta^2\psi(t, x)/\delta t^2 = -\omega_0^2\, \psi(t, x) + c^2\, \delta^2\psi(t, x)/\delta x^2}$ **Équation de Klein-Gordon**

Solution : On prend $\psi(t, x) = A\, e^{j(\omega t - k x)}$ donc
$- \omega^2 \mathbf{A} \cos(\omega t - k x) = - \omega_0^2\ \mathbf{A} \cos(\omega t - k x) - c^2 k^2 \mathbf{A} \cos(\omega t - k x)$ donc
$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2$ On retrouve l'équation de dispersion pour les grandes longueurs d'onde : $\omega^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2/4\ a^2\ k^2$

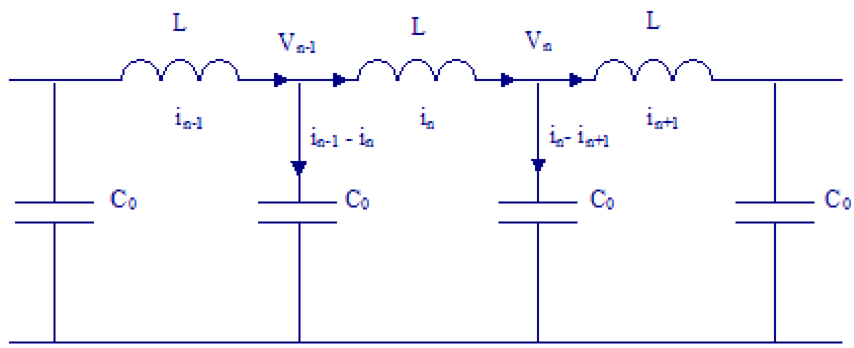
L'équation de Klein-Gordon se retrouve dans de nombreux domaines.
Par exemple en mécanique quantique : Si on multiplie par $\hbar^2$, on obtient
$\hbar^2\omega^2 = \hbar^2\omega_0^2 + c^2 \hbar^2 k^2$
mais $\hbar^2 \omega^2 = E^2$ et $\hbar^2 k^2 = p^2$ (relation de De Broglie)
On obtient donc $E^2 = \hbar^2\omega_0^2 + p^2c^2$, si on substitue $\hbar^2\omega_0^2$ par m^2c^4 et on a
$E^2 = m^2c^4 + p^2 c^2$ (relation relativiste entre l'énergie et la quantité de mouvement)
L'équation de Klein-Gordon en mécanique quantique est donc :
$\hbar^2\, \delta^2\psi(t, x) /\delta t^2 = \hbar^2 c^2\, \delta^2\psi(t, x)/\delta x^2 - m^2c^4\ \psi(t, x)$

3. Filtres électriques

3.1 Schémas des filtres passe-bande et passe-bas



Filtre passe-bande



Filtre passe-bas

3.2 Analogie mécanique électrique

Le circuit est équivalent au filtre mécanique en remplaçant :
ω_0^2 par $1/(LC)$
ω_c^2 par $4/(LC_0)$
On a ainsi un filtre passe-bande laissant passer les pulsations comprises entre ω_0 et $(\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

Si on supprime les condensateurs C, ω_0 est nul et on obtient un filtre passe-bas de pulsation de coupure égale à $\omega_c = 2/(LC_0)^{1/2}$

Si on supprime les condensateurs C et qu'on inverse les positions de C_0 et L, on obtient un filtre passe-haut de pulsation de coupure égale à $\omega_c = 1/(4LC)^{1/2}$

3.3 Étude directe des filtres passe-bas, passe-bande

$i_n = I_m e^{j(\omega t - kna)}$

L'impédance complexe d'une bobine sans résistance est $Z_b = j L\omega$ et celle d'un condensateur est $Z_c = - j/C\omega$

On a donc $V_{n-1} - V_n = (j L\omega - j/C\omega)\, i_n$

$V_{n-1} = - j/C_0\omega \;(i_{n-1} - i_n)$

$V_n = - j/C_0\omega \;(i_n - i_{n+1})$

$(j L\omega - j/C\omega)\, i_n = \; j/C_0 \,\omega \;(2 i_n - i_{n+1} - i_{n-1})$

$\omega^2 - 1/(LC))\, i_n = \; 1/(LC_0) \;(2 i_n - i_{n+1} - i_{n-1})$

$\omega^2 - 1/(LC)\, I_m \; = \; 2\; 1/(LC_0) \;(1 - (e^{ka} + e^{-ka})/2)\, I_m$

$\boldsymbol{(\omega^2 - \omega_0^2) \; = \; \omega_c^2/2 \;(1 - (e^{ka} + e^{-ka})/2) \qquad \omega_0^2 = 1/(LC) \qquad \omega_c^2 = \; 4/(LC_0)}$

On retrouve la même équation que dans le cas mécanique, on a donc les mêmes solutions.

Filtre passe-bande :

Si $\omega < \omega_0$

$\kappa \; = \; 2 \;\text{arcsh}\, ((\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}/\omega_c)/a$

$\mathbf{i}_n = A\, e^{-\kappa na} \;\; \cos(\omega\, t\,)$

L'amplitude décroît exponentiellement donc l'oscillation ne se transmet pas quand la pulsation est inférieure à ω_0

Le coefficient de transmission est $T = i_N / i_0 \; = e^{-\kappa Na} \; = \; \exp(- 2\, N\, \text{arcsh}\, ((\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}/\omega_c))$

Si $\omega > (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

$\kappa \; = 2 \;\text{arcch}\, ((\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}/\omega_c)/a \; < 0$

$i_n = A\, e^{-\kappa na} \;\; \cos(\omega\, t\,)$

L'amplitude décroît exponentiellement donc l'oscillation ne se transmet pas quand la pulsation est supérieure à $(\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

Le coefficient de transmission est $T = i_N / i_0 \; = e^{-\kappa Na} \; = \; \exp(- 2\, N\, \text{arcch}\, ((\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}/\omega_c))$

Si $\omega_0 \; <= \; \omega <= (\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

$k \; = \; 2 \;\text{arcsin}\, ((\omega^2 - \omega_0^2)^{1/2}/\omega_c)/a \; < 0$

$\boldsymbol{\psi}_n = A \;\; \cos(\omega\, t - k\, na\,)$ Onde de vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k$

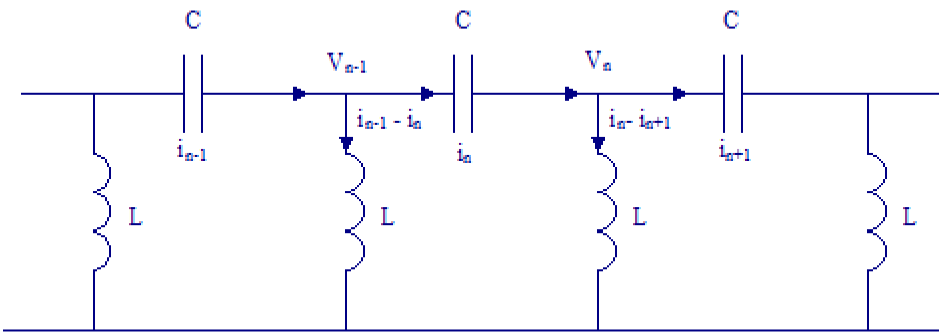
La vibration est parfaitement transmise sous forme d'une onde, on a donc un filtre passe-bande entre les pulsations ω_0 et $(\omega_0^2 + \omega_c^2)^{1/2}$

Le coefficient de transmission est $T = i_N / i_0 \; = 1$

Filtre passe-bas :

On a la même chose en faisant $\omega_0 = 0$.

3.4 Étude directe du filtre passe-haut



Comme pour le cas du filtre passe-bande pour les grandes fréquences, pour que toutes les valeurs de ω soient possibles, il faut :

$i_{n-1} = - I_m\, e^{j(\omega t - k(n-1)a)}$

$i_n = I_m\, e^{j(\omega t - kna)}$

$i_n = - I_m\, e^{j(\omega t - k(n+1)a)}$

L' impédance complexe d'une bobine sans résistance est $Z_b = j L\omega$ et celle d'un condensateur est $Z_c = - j/C\omega$

On a donc $V_{n-1} - V_n = - j/C\omega \;\; i_n$

$V_{n-1} = j L\omega \; (i_{n-1} - i_n)$

$V_n = j L\omega \; (i_n - i_{n+1})$

$- j/C\omega \;\; i_n = - j L\omega \; (2\, i_n - i_{n+1} - i_{n-1})$

$1/\omega^2 \;\; i_n = LC \; (2\, i_n - i_{n+1} - i_{n-1})$

$1/\omega^2 \;\; I_m = 2\, LC \; (1 + (e^{ka} + e^{-ka})/2)\, I_m$

$1/\omega^2 = 2\, LC \; (1 + (e^{ka} + e^{-ka})/2)$ **On pose $1/\omega_c{}^2 = 4LC$**

$1/ \omega^2 = 1/(2\omega_c{}^2) \; (1 + (e^{ka} + e^{-ka})/2)$

- **Si $1/\omega <= 2\, (LC)^{1/2}$**

Si $1/\omega <= 2\, (LC)^{1/2}$ $(e^{ka} + e^{-ka})/2 <= 1$ donc k est imaginaire

$1/\omega^2 = 2\, LC \; (1 + \cos ka) = 4\, LC \; (\sin^2 ka/2)$

$1/\omega^2 = 4\, LC \; (\sin^2 ka/2) = 1/\omega_c{}^2 \; (\sin^2 ka/2)$

$k = 2 \arcsin(\omega_c/\omega)/a$ (Équation de dispersion pour $\omega > \omega_c$)

On a alors $i = Im \cos(\omega\, t - k\, na)$ Le signal est transmis par le filtre quand la pulsation est supérieure à ω_c .

Le coefficient de transmission est $T = i_N / i_0 = 1$

- **Si $1/\omega > 2\, (LC)^{1/2}$**

Si $1/\omega > 2\, (LC)^{1/2}$ $(e^{ka} + e^{-ka})/2 > 1$ donc k est réel

$1/\omega^2 = 2\, LC \; (1 + \text{ch}\, ka) = 4\, LC \; (\text{ch}^2\, ka/2)$

$1/ \omega^2 = 4\, LC \; (\text{ch}^2\, ka/2) = 1/\omega_c{}^2 \; (\text{ch}^2\, ka/2)$

$k = - 2\, \text{arcch}(\omega_c/\omega)/a$ (Le signe + n'est pas physique)

(Équation de dispersion pour $\omega > \omega_c$)

On pose $\kappa = - k$

$i_n = A\, e^{-\kappa na}\ \cos(\omega\, t)$ L'amplitude décroît exponentiellement donc l'oscillation ne se transmet pas quand la pulsation est inférieure à ω_c

Le coefficient de transmission est $T = i_N / i_0 = e^{-\kappa Na} = \exp(-\,2N\ \mathrm{arcch}\,(\omega_c/\omega_0) e^{-2\,N\ \mathrm{arcsh}(\omega c/\omega)}$

3.5 Le câble coaxial

Un câble coaxial est équivalent à un circuit passe_bas ($\omega_0 = 0$) dont l'inductance et la capacité sont réparties de manière continue, donc tels que a tende vers 0

L'inductance par unité de longueur est $L_0 = L/a$

La capacité par unité de longueur est $C_0 = C/a$

$\omega^2 = \omega_c{}^2/2\ (1 - (e^{ka} + e^{-ka})/2) = \omega_c{}^2/4\ k^2 a^2 = k^2 a^2/(LC) = k^2/(L_0C_0)$

$\omega^2 = k^2/(L_0C_0)$

L'inductance par unité de longueur d'un câble coaxial vaut $L_0 = \mu_0/2\pi\ \ln(R_2/R_1)$

La capacité par unité de longueur d'un câble coaxial est $C_0 = 2\pi\, \varepsilon_0/\ln(R_2/R_1)$

R_1 et R_2 étant les rayons extérieur et intérieur

$1/(L_0C_0) = 1/(\varepsilon_0\mu_0) = c^2$ (c : vitesse de la lumière)

$\omega = k\,c$ $k = \omega/c$ Le câble transmet les ondes sans dispersion à la vitesse de la lumière.

En réalité le câble est en général rempli d'un diélectrique de permittivité relative ε_r. Dans ce cas $1/(L_0C_0) = 1/(\varepsilon_r\varepsilon_0\,\mu_0) = c^2/\varepsilon_r$

La vitesse de transmission n'est donc que de $c/(\varepsilon_r)^{1/2}$.

Impédance du câble

En un point, $V = q/C$ donc $\delta V/\delta t = 1/C\ \delta q/\delta t$ $\delta q/\delta t = i\,(t,x-a) - i\,(t,x) = -\,\delta i/\delta x\ a$

$\delta V/\delta t = -\,\omega \sin(\omega t - kx)$ et $\delta i/\delta x = k \sin(\omega t - kx)$

$-\,\omega\, V_m \sin(\omega t - kx) = -\,k\, a/C\ I_m \sin(\omega t - kx) = -\,k/C_0\ I_m \sin(\omega t - kx)$

$V_m = k/(\omega C_0)\ I_m = Z\ I_m$ Z étant l'impédance du câble

$k/\omega = 1/v_\varphi = (L_0C_0)^{1/2}$ donc

$\mathbf{Z = (L_0/C_0)^{1/2}}$

$(L_0/C_0)^{1/2} = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}\ \ln(R_2/R_1) = 37{,}7\ \ln(R_2/R_1)$ ce qui vaut une cinquantaine d'ohms.