Animation

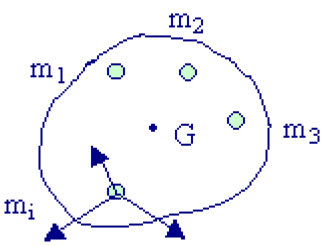
Dynamique du solide

Animation

par Gilbert Gastebois

1 . Les lois de la dynamique pour un solide

1.1 Théorème du centre d'inertie



La masse M de l'objet est divisée en masses élémentaires m_1, m_2, m_3.....m_i...m_n qu'on peut assimiler aux atomes si on veut, mais ce n'est pas essentiel. Ces masses subissent l'attraction de leurs voisines, ce sont les forces internes $\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{int}}$ et des forces extérieures $\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{ext}}$ imposées de l'extérieur (gravitation ou autres). On peut donc appliquer à chaque masse m_i, la 2ème loi de Newton :

$d(m_i\mathbf{V_i}) = \Sigma\mathbf{F_i} = \Sigma\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{int}} + \Sigma\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{ext}}$

2ème loi de Newton : $d(m_i\mathbf{V_i}) = \Sigma\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{int}} + \Sigma\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{ext}}$ (O est l'origine du repère Oxyz)

On additionne les équations de toutes les masses m_i :

$\Sigma(d(m_i\, d\mathbf{OM_i}/dt)/dt) = \Sigma(\Sigma\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{int}} + \Sigma\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{ext}}) = \Sigma\mathbf{F}_{\mathrm{int}} + \Sigma\mathbf{F}_{\mathrm{ext}} = \Sigma\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$

(Les forces intérieures s'annulent deux à deux)

$d(\Sigma(m_i\, d\mathbf{OM_i}/dt))/dt = d(\Sigma(m_i\, d(\mathbf{OG} + \mathbf{GM_i})/dt))/dt =$

$d(\Sigma(m_i\, d\mathbf{OG}/dt))/dt + d(\Sigma(m_i\, d\mathbf{GM_i}/dt))/dt$

$\Sigma(m_i\, d\mathbf{OG}/dt) = \Sigma(m_i)d\mathbf{OG}/dt = M\mathbf{V_G}$ et $\Sigma(m_i\, d\mathbf{GM_i}/dt) = d(\Sigma(m_i\mathbf{GM_i}))/dt = 0$ par définition de G

$d(\Sigma(m_i\, d\mathbf{OM_i}/dt))/dt = d(M\mathbf{V_G})/dt$ donc

$d(M\mathbf{V_G})/dt = \Sigma\,\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$ **Théorème du centre d'inertie**

M est constant donc $d(M\mathbf{V_G})/dt = Md\mathbf{V_G}/dt = M\,\mathbf{a_G}$ et

$M\,\mathbf{a_G} = \Sigma\,\mathbf{F}_{\mathrm{ext}}$

1.2 Théorème des moments

Le solide peut tourner autour d'un axe passant par O, alors :

2ème loi de Newton : $m_i\,\mathbf{a_i} = m_i\, d^2\mathbf{OM_i}/dt^2$, on multiplie par le vecteur $\mathbf{V_i}$ vitesse de le masse m_i

$m_i\,\mathbf{a_i}\cdot\mathbf{V_i} = m_i\,\mathbf{V_i}\cdot d\mathbf{V_i}/dt = m_i\, d(1/2\,\mathbf{V_i}\cdot\mathbf{V_i})/dt = m_i\, d(V_i^{\,2}/2)/dt = \Sigma\,(\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{int}}\cdot\mathbf{V_i}) + \Sigma\,(\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{ext}}\cdot\mathbf{V_i})$

$V_i = \omega\, r_i$ (ω est la vitesse angulaire de la masse M et r_i la distance de m_i à l'axe passant par O)

$m_i\, r_i^{\,2} d(\omega^2/2)/dt = m_i\, r_i^{\,2}\omega\, d\omega/dt = \Sigma\,(\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{int}}\cdot\mathbf{V_i}) + \Sigma\,(\mathbf{F}_{\mathbf{i}\ \mathrm{ext}}\cdot\mathbf{V_i}) =$

$\Sigma\, F_{i\ \mathrm{int}}\, r_i\,\omega\cos\alpha_i + \Sigma\, F_{i\ \mathrm{ext}}\, r_i\,\omega\cos\beta_i$

(α_i et β_i sont les angles entre les forces $\mathbf{F_i}$ et les vitesses $\mathbf{V_i}$)

On divise par ω : $m_i\, r_i^{\,2}\, d\omega/dt = \Sigma\, F_{i\ \mathrm{int}}\, r_i\cos\alpha_i + \Sigma\, F_{i\ \mathrm{ext}}\, r_i\cos\beta_i =$

$\Sigma\, M_{Fi\ \mathrm{int}} + \Sigma\, M_{Fi\ \mathrm{ext}}$ $F_i\ r_i\cos\alpha_i$ est en effet le moment de F_i par rapport à l'axe de rotation

$m_i\, r_i^{\,2}\, d\omega/dt = \Sigma\, M_{Fi\ \mathrm{int}} + \Sigma\, M_{Fi\ \mathrm{ext}}$

On additionne les équations de toutes les masses m_i :

$\Sigma(m_i r_i^2 d\omega/dt) = d(\Sigma(m_i r_i^2)\omega)/dt = \Sigma (\Sigma M_{Fi\ int} + \Sigma M_{Fi\ ext})$

$S(m_i r_i^2) = J$

(Définition du moment d'inertie de la masse M par rapport à l'axe passant par O)

$d(J\omega)/dt = \Sigma (\Sigma M_{Fi\ int} + \Sigma M_{Fi\ ext}) = \Sigma (M_{F\ int} + M_{F\ ext}) = \Sigma M_{F\ ext}$

($\Sigma M_{F\ int} = 0$ car les moments des forces d'interaction s'annulent deux à deux)

donc $d(J\omega)/dt = \Sigma M_{F\ ext}$ (θ est l'angle de rotation de la masse M autour de son axe)

$d(J\omega)/dt = \Sigma M_{F\ ext}$ Théorème des moments

Si J est constant, ce qui est fréquent, $d(J\omega)/dt = Jd\omega/dt = Jd^2\theta/dt^2$ =donc :

$Jd^2\theta/dt^2 = \Sigma M_{F\ ext}$ Théorème des moments à moment d'inertie constant

1.3 Énergie cinétique du solide

On désigne par $\mathbf{V_G}$ la vitesse du centre d'inertie du solide et par ω la vitesse angulaire du solide autour de G.

$E_{ci} = 1/2\ m_i V_i^2$ est l'énergie cinétique de la masse élémentaire m_i.

$E_{ci} = 1/2\ m_i V_i^2 = 1/2\ m_i \mathbf{V_i}.\mathbf{V_i} = 1/2\ m_i (d\mathbf{OM_i}/dt)^2 = 1/2\ m_i (d(\mathbf{OG} + \mathbf{GM_i})/dt)^2$

$E_{ci} = 1/2\ m_i ((d\mathbf{OG}/dt)^2 + (d\mathbf{GM_i}/dt)^2 + 2\ d\mathbf{OG}/dt\ .\ d\mathbf{GM_i}/dt)$

$E_{ci} = 1/2\ m_i (V_G^2 + V_{Gi}^2 + 2\ \mathbf{V_G}\ .\ d\mathbf{GM_i}/dt)$ $V_{Gi} = r_i\ \omega$

$E_c = \Sigma E_{ci} = 1/2\ \Sigma (m_i V_G^2) + 1/2\ \Sigma (m_i V_{Gi}^2) + \Sigma (m_i \mathbf{V_G}\ .\ d\mathbf{GM_i}/dt)$

$E_c = 1/2\ \Sigma (m_i)V_G^2 + 1/2\ \Sigma (m_i r_i^2)\omega^2 + \mathbf{V_G}.\ \Sigma (d(m_i \mathbf{GM_i}/dt))$

$E_c = 1/2\ \Sigma (m_i)V_G^2 + 1/2\ \Sigma (m_i r_i^2)\omega^2 + \mathbf{V_G}.\ \Sigma (d(m_i \mathbf{GM_i}/dt))$

$E_c = 1/2\ \Sigma (m_i)V_G^2 + 1/2\ \Sigma (m_i r_i^2)\omega^2 + \mathbf{V_G}.\ d(\Sigma (m_i \mathbf{GM_i}))/dt)$

mais $\Sigma (m_i \mathbf{GM_i}) = M\ \mathbf{GG} = 0$, $\Sigma (m_i) = M$ et $\Sigma (m_i r_i^2) = J$

(J est le moment d'inertie du solide par rapport à un axe passant par G)

$E_c = 1/2\ MV_G^2 + 1/2\ J\omega^2$

2 . Etude de l'équilibre d'un solide

2.1 Lois de l'équilibre

A l'équilibre, $\mathbf{a_G} = \mathbf{0}$ et ω = 0 donc :

$S\ \mathbf{F}_{ext} = 0$ et $\Sigma M_{F\ ext} = 0$ Ce sont les deux lois qui doivent être vérifiées

(L'objet étant immobile, tout point O peut faire office d'axe)

2.2 Équilibre d'un objet soumis à 2 forces

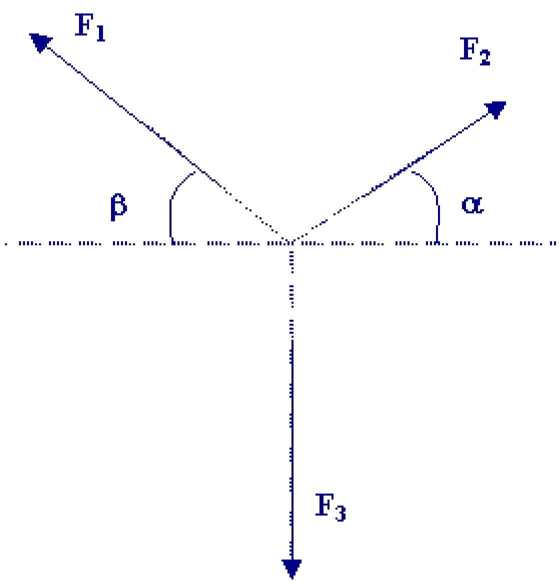
$S\ \mathbf{F}_{ext} = 0$ donc $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2} = \mathbf{0}$ donc $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ sont parallèles et $F_1 = F_2$, les deux forces sont égales et de sens contraires.

$M_{F\ ext} = 0$ donc $M_{F1} + M_{F2} = 0$ Comme $F_1 = F_2$ et que $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$ sont parallèles, il faut que les deux bras de levier des deux forces soient égaux, il faut donc que les deux forces soient portées par la même droite, donc :

Les deux forces doivent être de valeur égale, de sens contraire et alignées.

2.3 Équilibre d'un objet soumis à 3 forces

2.3.1 Conditions d'équilibre



S $\mathbf{F}_{ext}$ = 0 donc $\mathbf{F_1 + F_2 + F_3 = 0}$ Les trois forces sont donc dans un même plan.

$M_{F\ ext} = 0$ donc $M_{F1} + M_{F2} + M_{F3} = 0$
On prend un axe passant par le point O point de concours de $\mathbf{F_1}$ et $\mathbf{F_2}$, les deux moments par rapport à cet axe, M_{F1} et M_{F2} sont tous les deux nuls et donc il faut que $M_{F3} = 0$ pour que leur somme soit nulle. Ceci impose que la direction de F_3 passe aussi par le point O et donc il faut que les trois forces soient concourantes.

Conditions d'équilibre :

- $\mathbf{F_1}$, $\mathbf{F_2}$ et $\mathbf{F_3}$ sont coplanaires et concourantes
- $\mathbf{F_1 + F_2 + F_3 = 0}$

2.3.2 Angles d'inclinaison des forces

$\mathbf{F_1 + F_2 + F_3 = 0}$
On projette cette relation vectorielle sur Ox
$F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + 0 = 0$ donc $\cos\beta = (F_1/F_2)\cos\alpha$
On la projette ensuite sur Oy
$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta - F_3 = 0$ donc $F_1 \sin\alpha + F_2 (1 - \cos^2\beta)^{1/2} - F_3 = 0$
On remplace $\cos^2\beta$ par $(F_1/F_2)^2 \cos^2\alpha$: $F_1 \sin\alpha + F_2 (1 - (F_1/F_2)^2 \cos^2\alpha)^{1/2} - F_3 = 0$
$F_2 (1 - (F_1/F_2)^2 \cos^2\alpha)^{1/2} = F_3 - F_1 \sin\alpha$ donc $F_2^2 (1 - (F_1/F_2)^2 \cos^2\alpha) =$
$(F_3 - F_1 \sin\alpha)^2 = F_3^2 + F_1^2 \sin^2\alpha - 2F_3F_1 \sin\alpha$
$F_2^2 - F_1^2 \cos^2\alpha = F_3^2 + F_1^2 \sin^2\alpha - 2F_3F_1 \sin\alpha$ donc
$F_2^2 = F_3^2 + F_1^2 \sin^2\alpha + F_1^2 \cos^2\alpha - 2F_3F_1 \sin\alpha = F_3^2 + F_1^2 - 2F_3F_1 \sin\alpha$
$F_2^2 = F_3^2 + F_1^2 - 2F_1F_3 \sin\alpha$ donc $\sin\alpha = (F_3^2 + F_1^2 - F_2^2)/(2F_1F_3)$
$\mathbf{\sin\alpha = (F_3^2 - F_2^2 + F_1^2)/(2F_1F_3)}$

$F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta - F_3 = 0$ donc

$F_2 \sin\beta = F_3 - F_1 \sin\alpha = F_3 - (F_3^2 + F_1^2 - F_2^2)/(2F_3) = (2F_3^2 - F_3^2 - F_1^2 + F_2^2)/(2F_3)$
$F_2 \sin\beta = (F_3^2 - F_1^2 + F_2^2)/(2F_3)$ donc $\sin\beta = (F_3^2 - F_1^2 + F_2^2)/(2F_2F_3)$
$\mathbf{\sin\beta = (F_3^2 - F_1^2 + F_2^2)/(2F_2F_3)}$