

par Gilbert Gastebois

## 1. Historique

En 1851, Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) réalisa sa célèbre expérience au Panthéon de Paris. Il lâcha sans vitesse initiale un long pendule simple de 67 m de longueur fixé au plafond du dôme. Les spectateurs purent alors observer la lente rotation du plan d'oscillation du pendule. En une heure, le pendule avait tourné de 11,3°.

## 2. Notations

Les vecteurs sont notés en gras

$R_p$  Rayon de la Terre = 6370 km

$\lambda$  Latitude du pendule

$\Omega$  Vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre parallèle à l'axe Sud-Nord

$R$  Distance du point M à l'axe de la Terre :  $R = R_p \cos \lambda$

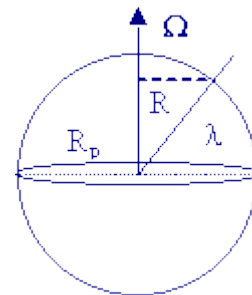
$T_p$  Période de rotation de la Terre = 23,92 h

(  $\Omega = 2\pi/T_p = 7,297 \cdot 10^{-5}$  rd/s )

$L_0$  Longueur du pendule simple

$T$  Période du pendule

$T_f$  Période de rotation du plan d'oscillation du pendule



$df/dt$  est notée  $f'$  et  $d^2f/dt^2$  est notée  $f''$

## 3. 2<sup>ème</sup> loi de Newton dans un repère non galiléen

### 3.1 Accélération dans un repère non galiléen.

Soit un point M dans un repère tournant autour de l'axe z avec une vitesse angulaire  $\Omega$

$$\mathbf{OM} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{OM}/dt = x' \mathbf{i} + x \Omega \mathbf{j} + y' \mathbf{j} - y \Omega \mathbf{i} + z' \mathbf{k} \quad ( \mathbf{i}' = \Omega \mathbf{j} \text{ et } \mathbf{j}' = -\Omega \mathbf{i} \text{ **} )$$

$$d^2\mathbf{OM}/dt^2 = x'' \mathbf{i} + x' \Omega \mathbf{j} + x' \Omega \mathbf{j} - x \Omega^2 \mathbf{i} + y'' \mathbf{j} - y' \Omega \mathbf{i} - y' \Omega \mathbf{i} - y \Omega^2 \mathbf{j} + z'' \mathbf{k}$$

$$d^2\mathbf{OM}/dt^2 = x'' \mathbf{i} + y'' \mathbf{j} + z'' \mathbf{k} - \Omega^2 x \mathbf{i} - \Omega^2 y \mathbf{j} + 2x' \Omega \mathbf{j} - 2y' \Omega \mathbf{i}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x'' - \Omega^2 x - 2 y' \Omega \\ y'' - \Omega^2 y + 2 x' \Omega \\ z'' \end{pmatrix} = \mathbf{a}_r - \Omega^2 \mathbf{R} - 2 \mathbf{v}_r \times \Omega \quad ( \times \text{ est le produit vectoriel } )$$

On pose  $\Omega^2 \mathbf{R} = \mathbf{a}_e$  et  $2 \mathbf{v}_r \times \Omega = \mathbf{a}_c$

( Cette relation vectorielle est vraie quelle que soit l'orientation de  $\Omega$  par rapport aux axes )

$\mathbf{a}_r$  est l'accélération relative au repère tournant,  $\mathbf{a}_e$  est l'accélération centrifuge et  $\mathbf{a}_c$  est l'accélération de Coriolis

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_e - \mathbf{a}_c$$

### 3.2 2<sup>ème</sup> loi de Newton

$$m \mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = m \mathbf{a}_r - m \mathbf{a}_e - m \mathbf{a}_c$$

$$\text{ou } m \mathbf{a}_r = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} + m \mathbf{a}_e + m \mathbf{a}_c = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

(  $\mathbf{F}_e$  est la "force" centrifuge et  $\mathbf{F}_c$  est la "force" de Coriolis )

$$m \mathbf{a}_r = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c$$

$$\mathbf{F}_e = m \Omega^2 \mathbf{R}$$

$$\mathbf{F}_c = 2 m \mathbf{v}_r \times \Omega$$

2<sup>ème</sup> loi de Newton dans le repère tournant :

$$m \mathbf{a}_r = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c = \Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} + m \Omega^2 \mathbf{R} + 2 m \mathbf{v}_r \times \Omega$$

On retrouve la loi de Newton à condition d'ajouter aux forces extérieures, deux pseudo-forces centrifuge et de Coriolis

## 4. Etude de la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault

### 4.1 Période de rotation du plan d'oscillation pour les petits angles et pour une force centrifuge négligeable

$$m \mathbf{a}_r = m \mathbf{g} + \mathbf{T} + m \Omega^2 \mathbf{R} + 2 m \mathbf{v}_r \times \Omega$$

La force centrifuge est une force constante qu'on peut ajouter à  $m \mathbf{g}$  pour donner un poids apparent  $m \mathbf{g}_a = m \mathbf{g} + \mathbf{F}_e$

Dans les conditions terrestres  $a_e \ll g$  et  $g_a = g$  ( $0 < a_e < 0,034 \text{ m/s}^2 \ll 9,8 \text{ m/s}^2$ )

$$\text{On a alors } m \mathbf{a}_r = m \mathbf{g} + \mathbf{T} + 2 m \mathbf{v}_r \times \Omega$$

On prend un repère dont l'axe Oz est parallèle à  $\mathbf{g}$  ( axe d'équilibre du pendule ) et Oy dans la direction du Nord.

On prend pour simplifier les calculs,  $\mathbf{v}_r$  dans le plan Oyz

Dans ce repère,  $\mathbf{v}_r = v_y \mathbf{j}$  ( Pour les petits angles,  $v_z = 0$  ) donc

$$\mathbf{v}_r = v_y \mathbf{j} \text{ et } \Omega = \Omega \cos \lambda \mathbf{j} + \Omega \sin \lambda \mathbf{k}$$

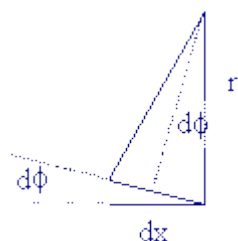
$$\mathbf{v}_r \times \Omega = v_y \Omega \sin \lambda \mathbf{i} \text{ donc } (\mathbf{v}_r \times \Omega)_x = v_y \Omega \sin \lambda = v_r \Omega \sin \lambda$$

$\mathbf{F}_c$  est une force perpendiculaire à  $\mathbf{v}_r$  ( vers sa droite dans l'hémisphère Nord où  $\lambda > 0$  ) et

$$\text{vaut ainsi } F_c = 2 m (\mathbf{v}_r \times \Omega)_x = 2 m v_r \Omega \sin \lambda$$

Cette force crée une accélération  $a_c = v_r^2/r$  et  $a_c = F_c/m = 2 v_r \Omega \sin \lambda$

$$\text{On a donc } v_r^2/r = 2 v_r \Omega \sin \lambda \text{ donc } v_r/r = 2 \Omega \sin \lambda$$



A t, le pendule oscille dans le plan xOz. ( La direction Ox est une direction quelconque perpendiculaire à l'axe du pendule ).

Pendant que le pendule se déplace de dx, son plan d'oscillation tourne de  $d\phi$ .

$d\phi$  étant très petit,  $r d\phi = dx/2$

Si l'amplitude d'oscillation est faible, approximation des petits angles,  $v_r$  reste quasiment perpendiculaire à Oz

et  $v_r = dx/dt$

$$2 r d\phi = dx = v_r dt \text{ donc } v_r/r = 2 d\phi/dt$$

$$v_r/r = 2 d\phi/dt \text{ et } v_r/r = 2 \Omega \sin \lambda \text{ donc } \omega_f = d\phi/dt = \Omega \sin \lambda = \text{constante}$$

$\omega_f$  est constant donc le plan d'oscillation tourne uniformément autour de l'axe du pendule.

$$T_f = 2 \pi / \omega_f = 2 \pi / (\Omega \sin \lambda) = T_p / \sin \lambda$$

La période de rotation du pendule autour de son axe est  $T_f = T_p / \sin \lambda$

Par exemple à Paris où  $\lambda = 49^\circ$ , le pendule fait un tour complet autour de son axe en  $24 / \sin \lambda = 31 \text{ h } 48 \text{ min}$  ( $11,3^\circ$  en 1 heure)

Aux pôles,  $T_f = T_p$ , le pendule garde un plan d'oscillation fixe par rapport à l'Univers et la Terre tourne sous lui..

A l'équateur,  $\lambda = 0$ ,  $T_f$  est infini, le pendule ne tourne pas. Si l'amplitude est assez grande, une faible force de Coriolis existe encore et lui donne un mouvement compliqué, le plan d'oscillation va et vient à droite et à gauche, mais globalement, il n'y a pas de rotation.

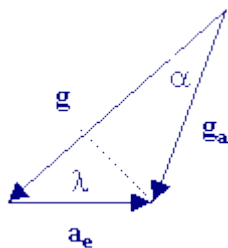
**Remarque :** Cette théorie suppose qu'on est dans l'approximation des petits angles ( La formule  $T_f = T_p / \sin \lambda$  n'est strictement vraie que pour une amplitude nulle... ).

Si l'amplitude augmente  $dx < v_f dt$  et  $d\phi/dt < \omega \sin \lambda$  donc  $T_f > T_p / \sin \lambda$

La période de rotation du plan d'oscillation du pendule augmente légèrement avec l'amplitude d'oscillation.

D'autre part dans l'hémisphère Sud,  $\lambda < 0$  donc  $\omega_f < 0$  et le pendule tourne dans l'autre sens ( le sens inverse des aiguilles d'une montre, vu de dessus ).

#### 4.2 Période de rotation du plan d'oscillation pour les petits angles avec force centrifuge



$\mathbf{g}_a$  est la pesanteur apparente :  $\mathbf{g}_a = \mathbf{g} + \mathbf{a}_e$

$$g_a^2 = g^2 + a_e^2 - 2 g a_e \cos \lambda = g^2 + \Omega^2 R_p \cos \lambda - 2 g \Omega^2 R_p \cos^2 \lambda$$

$$\tan \alpha = a_e \sin \lambda / (g - a_e \cos \lambda) = \Omega^2 R_p \cos \lambda \sin \lambda / (g - \Omega^2 R_p \cos^2 \lambda)$$

Il suffit d'appliquer la théorie précédente ( sans force centrifuge ) en remplaçant  $g$  par  $g_a$  et  $\lambda$  par  $\lambda_a = \lambda + \alpha$

donc  $T_f = T_p / \sin \lambda_a$

### 5. Équations différentielles du mouvement du pendule de Foucault pour les petits angles.

$\mathbf{a} = m \mathbf{g}_a + \mathbf{T} + 2 m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$  La force centrifuge est intégrée dans  $\mathbf{g}_a$

On prend un repère dont l'origine O est l'axe du pendule ( $z < 0$ ), l'axe Oz est parallèle à  $\mathbf{g}_a$  (axe d'équilibre du pendule) et Oy dans la direction du Nord. On appelle  $\theta$  l'élongation angulaire par rapport à l'axe Oz.

Si  $\theta$  est petit, on n'a plus de mouvement significatif sur Oz, donc  $z = -l$ ,  $z' = 0$ ,  $z'' = 0$  et  $\cos \theta = 1 - \theta^2/2 = 1$ .

De plus, d'après la conservation de l'énergie mécanique,  $v^2/L_0 = 2 g_a (\cos \theta - \cos \theta_m) = g_a (\theta_m^2 - \theta^2) \ll g_a$  donc  $T = m g_a$

On pose  $\omega_0^2 = g_a/L_0$  ( $\omega_0$  est la pulsation du pendule dans un repère galiléen)

$$x'' = -T/m x/L_0 + 2 y' \Omega \sin \lambda_a - 2 z' \Omega \cos \lambda_a = -g_a x/L_0 + 2 y' \Omega \sin \lambda_a = -\omega_0^2 x + 2 y' \Omega \sin \lambda_a$$

$$y'' = -T/m y/L_0 - 2 x' \Omega \sin \lambda_a = -g_a y/L_0 - 2 x' \Omega \sin \lambda_a = -\omega_0^2 y - 2 x' \Omega \sin \lambda_a$$

$$z'' = 0$$

**Équations différentielles pour les petits angles**

$$x'' = -\omega_0^2 x + 2 y' \Omega \sin \lambda_a$$

$$y'' = -\omega_0^2 y - 2 x' \Omega \sin \lambda_a$$

## 6. Solution des équations pour les petits angles

### 6.1 Solution générale

$$x'' = -\omega_0^2 x + 2 y' \Omega \sin \lambda_a$$

$$y'' = -\omega_0^2 y - 2 x' \Omega \sin \lambda_a$$

On peut alors prendre comme solution  $x = C_1 e^{j\alpha t}$  et  $y = C_2 e^{j\alpha t}$  puis remplacer dans les deux équations, mais la méthode la plus simple pour résoudre ces équations est de considérer  $x$  et  $y$  comme la partie entière et imaginaire d'un complexe  $Z = x + j y$

On a alors une seule équation  $Z'' = -\omega_0^2 Z - 2 j Z' \Omega \sin \lambda_a$

La solution est du type  $Z = c e^{j\alpha t}$  donc  $-\alpha^2 = -\omega_0^2 + 2 \alpha \Omega \sin \lambda_a$

La solution est  $\alpha = -\Omega \sin \lambda_a \pm (\omega_0^2 + \Omega^2 \sin^2 \lambda_a)^{1/2}$  On pose  $(\omega_0^2 + \Omega^2 \sin^2 \lambda_a)^{1/2} = \omega$  donc  $\alpha = -\Omega \sin \lambda_a \pm \omega$

On pose :  $\Omega_z = \Omega \sin \lambda_a$   $\omega_1 = \omega + \Omega_z$   $\omega_2 = \omega - \Omega_z$

La solution est donc  $Z = (C_1 e^{-j\omega_1 t} + C_2 e^{j\omega_2 t})$  ( $C_1$  et  $C_2$  sont des complexes :

$C_1 = c_1 + j c'_1$   $C_2 = c_2 + j c'_2$ ) donc

$$Z = (c_1 + j c'_1) \cos \omega_1 t - j (c_1 + j c'_1) \sin \omega_1 t + (c_2 + j c'_2) \cos \omega_2 t + j (c_2 + j c'_2) \sin \omega_2 t = x + j y$$

$$x = c_1 \cos (\omega + \Omega_z)t + c'_1 \sin (\omega + \Omega_z)t + c_2 \cos (\omega - \Omega_z)t - c'_2 \sin (\omega - \Omega_z)t$$

$$y = c'_1 \cos (\omega + \Omega_z)t - c_1 \sin (\omega + \Omega_z)t + c'_2 \cos (\omega - \Omega_z)t + c_2 \sin (\omega - \Omega_z)t$$

$$v_x = -c_1 (\omega + \Omega_z) \sin (\omega + \Omega_z)t + c'_1 (\omega + \Omega_z) \cos (\omega + \Omega_z)t -$$

$$c_2 (\omega - \Omega_z) \sin (\omega - \Omega_z)t - c'_2 (\omega - \Omega_z) \sin (\omega - \Omega_z)t$$

$$v_y = -c'_1 (\omega + \Omega_z) \sin (\omega + \Omega_z)t - c_1 (\omega + \Omega_z) \cos (\omega + \Omega_z)t -$$

$$c'_2 (\omega - \Omega_z) \sin (\omega - \Omega_z)t + c_2 (\omega - \Omega_z) \cos (\omega - \Omega_z)t$$

Conditions initiales : A  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$ ,  $v_x = v_{x0}$  et  $v_y = v_{y0}$  Cela donne :

$$c_1 = ((\omega - \Omega_z) x_0 - v_{y0}) / (2\omega)$$

$$c'_1 = ((\omega - \Omega_z) y_0 + v_{x0}) / (2\omega)$$

$$c_2 = ((\omega + \Omega_z) x_0 + v_{y0}) / (2\omega)$$

$$c'_2 = ((\omega + \Omega_z) y_0 - v_{x0}) / (2\omega)$$

### 6.2 1<sup>ère</sup> solution ( simple )

On prend  $c_1 = c_2 = r_0/2$   $c'_1 = c'_2 = 0$

$$x = r_0/2 \cos (\omega + \Omega_z)t + r_0/2 \cos (\omega - \Omega_z)t = r_0 \cos \Omega_z t \cos \omega t$$

$$y = -r_0/2 \sin (\omega + \Omega_z)t + r_0/2 \sin (\omega - \Omega_z)t = -r_0 \sin \Omega_z t \cos \omega t$$

$$v_x = -r_0 \omega \cos \Omega_z t \sin \omega t - r_0 \Omega_z \sin \Omega_z t \cos \omega t$$

$$v_y = r_0 \omega \sin \Omega_z t \sin \omega t - r_0 \Omega_z \cos \Omega_z t \cos \omega t$$

On change de repère en prenant un repère OXYZ tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire  $\Omega_z$ , on obtient

$$X = x \cos \Omega_z t - y \sin \Omega_z t = r_0 \cos \omega t$$

$$Y = y \cos \Omega_z t + x \sin \Omega_z t = 0$$

On a donc une oscillation sinusoïdale de pulsation  $\omega$  dans un plan qui tourne à la vitesse angulaire  $\Omega_z = \Omega \sin \lambda_a$ . On retrouve donc la période de rotation du plan d'oscillation :

$$T_f = T_p / \sin \lambda_a$$

Les conditions initiales à  $t = 0$ , sont alors  $x_0 = r_0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$  et  $v_{y0} = -r_0 \Omega_z$

Si on décale le pendule de  $r_0$  vers l'Est et qu'on le lance latéralement vers le Sud avec une vitesse de  $r_0 \Omega_z$ , le pendule a un mouvement particulièrement simple, il oscille dans un plan qui tourne à la vitesse angulaire  $\Omega_z = \Omega \sin \lambda_a$ . Le problème est que ce ne sont pas des conditions initiales très réalistes car difficiles à réaliser en pratique.

Pour le pendule du Panthéon, cela donnerait  $v_{y0} = -0,357 \text{ mm/s} = -1,285 \text{ m/heure}$  !

**Remarque :**  $\omega$  est légèrement différente de  $\omega_0$  donc la période mesurée dans le repère en rotation est légèrement différente de la période propre du pendule, cependant l'écart est infime.  $\omega = (\omega_0^2 + \Omega^2 \sin^2 \lambda_a)^{1/2} = \omega_0 (1 + \Omega_z^2 / (2\omega_0^2))$  et  $T = T_0 (1 - \Omega_z^2 / (2\omega_0^2))$  ce qui fait une différence relative de  $10^{-8}$  pour le pendule du Panthéon !.

### 6.3 2<sup>ème</sup> solution ( plus réaliste )

Les conditions initiales les plus simples à réaliser sont : à  $t = 0$ ,  $x_0 = r_0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{x0} = 0$  et  $v_{y0} = 0$

$$c_1 = (\omega - \Omega_z) / (2\omega) r_0 \quad c'_1 = 0$$

$$c_2 = (\omega + \Omega_z) / (2\omega) r_0 \quad c'_2 = 0$$

donc

$$x = (\omega - \Omega_z) / (2\omega) r_0 \cos(\omega + \Omega_z)t + (\omega + \Omega_z) / (2\omega) r_0 \cos(\omega - \Omega_z)t =$$

$$r_0 \cos \Omega_z t \cos \omega t + r_0 \Omega_z / \omega \sin \Omega_z t \sin \omega t$$

$$y = -(\omega - \Omega_z) / (2\omega) r_0 \sin(\omega + \Omega_z)t + (\omega + \Omega_z) / (2\omega) r_0 \sin(\omega - \Omega_z)t =$$

$$-r_0 \sin \Omega_z t \cos \omega t + r_0 \Omega_z / \omega \cos \Omega_z t \sin \omega t$$

$$\mathbf{x} = r_0 \cos \Omega_z t \cos \omega t + r_0 \Omega_z / \omega \sin \Omega_z t \sin \omega t$$

$$\mathbf{y} = -r_0 \sin \Omega_z t \cos \omega t + r_0 \Omega_z / \omega \cos \Omega_z t \sin \omega t$$

On change de repère en prenant un repère OXYZ tournant autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire  $\Omega_z$ , on obtient

$$X = x \cos \Omega_z t - y \sin \Omega_z t$$

$$Y = y \cos \Omega_z t + x \sin \Omega_z t$$

$$X = r_0 \cos^2 \Omega_z t \cos \omega t + r_0 \Omega_z / \omega \sin \Omega_z t \cos \Omega_z t \sin \omega t + r_0 \sin^2 \Omega_z t \cos \omega t -$$

$$r_0 \Omega_z / \omega \sin \Omega_z t \cos \Omega_z t \sin \omega t$$

$$\mathbf{X} = r_0 \cos \omega t$$

$$Y = -r_0 \cos \Omega_z t \sin \Omega_z t \cos \omega t + r_0 \Omega_z / \omega \cos^2 \Omega_z t \sin \omega t + r_0 \cos \Omega_z t \sin \Omega_z t \cos \omega t + r_0$$

$$\Omega_z / \omega \sin^2 \Omega_z t \sin \omega t$$

$$\mathbf{Y} = r_0 \Omega_z / \omega \sin \omega t$$

donc  $X = a \cos \omega t$  et  $Y = b \sin \omega t$ . Ce sont les équations paramétriques d'une ellipse de demi-grand axe  $a = r_0$  et de demi-petit axe  $b = r_0 \Omega_z / \omega$  décrite dans le sens des aiguilles d'une montre ( vu de dessus ) dans l'hémisphère Nord ( en sens inverse dans l'hémisphère Sud ).

**Le pendule décrit une ellipse de demi-grand axe  $r_0$  et de demi-petit axe  $r_0 \Omega_z / \omega$  dans un repère tournant à la vitesse  $\Omega_z$  autour de Oz,**

**Remarque :** c'est le mouvement d'un pendule dans un repère galiléen si on l'écarte d'une distance  $r_0$  et qu'on le lance avec une vitesse initiale transverse égale à  $-r_0 \Omega_z$ , ce qui est bien la vitesse relative initiale du pendule par rapport au repère OXYZ. Ainsi, par rapport au repère tournant OXYZ, le mouvement du pendule est le même, que celui du même pendule

dans un repère galiléen.

D'autre part, le pendule décrivant une ellipse, est un pendule sphérique et on a donc une dérive de précession associée qui s'oppose à la rotation du plan. Cependant sur Terre avec une amplitude d'oscillation de  $5^\circ$ , la période de précession est environ 350 fois plus grande que la période de rotation du plan du pendule, ce qui ne modifie pas significativement cette période.

$$A t = T = 2 \pi / \omega$$

$$x = r_0 \cos ( 2 \pi \Omega_z / \omega ) = r_0 ( 1 - ( 2 \pi \Omega_z / \omega )^2 / 2 )$$

$$y = - r_0 \sin ( 2 \pi \Omega_z / \omega ) = - 2 \pi r_0 \Omega_z / \omega \quad \text{car } \Omega_z \ll \omega$$

Cela correspond à un angle de rotation  $\varphi = y/r_0 = - 2 \pi \Omega_z / \omega$  donc  $\omega_f = \varphi/T = \Omega_z$  et

$$T_f = 2 \pi / \omega_f = 2 \pi / \Omega_z = T / \sin \lambda_a$$

On peut noter que le rapport  $y/x$  des axes de l'ellipse vaut  $T/T_f$

Pour le pendule de Foucault du Panthéon, on a  $r_0 = 6,5$  m,  $T = 16,43$  s,  $\omega = 0,382$  rd/s,

$\lambda = 48,87^\circ$ , ce qui donne  $\Omega_z = 5,49 \cdot 10^{-5}$  rd/s.

Cela donne une période de rotation du plan du pendule  $T_f = 31,77$  h, un écart au passage à l'équilibre de 0,93 mm et un écart au bout d'une oscillation de 5,88 mm ce qui est faible, mais parfaitement observable

Si on prend en compte la force centrifuge due à la rotation de la Terre, on obtient

$\lambda_a = 48,97^\circ$  et  $T_f = 31,74$  h, et si on prend ensuite en compte la précession sphérique\* du

pendule, on trouve  $T_f = 31,74(1 + 3/8 r_0^2/L_0^2) = 31,85$  h, ce qui ne fait pas un très gros écart.

On peut prendre  $T_f = 31,8$  h.

## 7. Équations différentielles du mouvement du pendule de Foucault dans le cas général.

### 7.1 Expression du lagrangien

$\mathbf{a} = m \mathbf{g}_a + \mathbf{T} + \mathbf{f}_c$  La force centrifuge est intégrée dans  $\mathbf{g}_a$

Les équations de Lagrange seront :

$$L = 1/2 m v^2 - E_p = 1/2 m v_\theta^2 + 1/2 m v_\varphi^2 + m g_a L_0 \cos\theta$$

$$v_\theta = L_0 \theta' \quad v_\varphi = L_0 \sin\theta \varphi' \quad x = L_0 \sin\theta \cos\varphi \quad y = L_0 \sin\theta \sin\varphi$$

$$z = - L_0 \cos\theta$$

$$v_x = v_\theta \cos\theta \cos\varphi - v_\varphi \sin\varphi$$

$$v_y = v_\theta \cos\theta \sin\varphi + v_\varphi \cos\varphi$$

$$v_z = v_\theta \sin\theta$$

$$dx/d\theta = L_0 \cos\theta \cos\varphi$$

$$dy/d\theta = L_0 \cos\theta \sin\varphi$$

$$dz/d\theta = L_0 \sin\theta$$

$$dx/d\varphi = - L_0 \sin\theta \sin\varphi$$

$$dy/d\varphi = L_0 \sin\theta \cos\varphi$$

$$dz/d\varphi = 0$$

$$L = 1/2 m L_0^2 \theta'^2 + 1/2 m L_0^2 \sin^2\theta \varphi'^2 + m g_a L_0 \cos\theta$$

### 7.2 Équations de Lagrange du système et équations différentielles.

Les équations de Lagrange avec force  $\mathbf{f}$  ne dérivant pas d'un potentiel sont \*\*:

$$d(dL/dq)/dt - dL/dq = f_x dx/dq + f_y dy/dq + f_z dz/dq \quad \text{avec :}$$

$$L = 1/2 m L_0^2 \theta'^2 + 1/2 m L_0^2 \sin^2\theta \varphi'^2 + m g_a L_0 \cos\theta \quad (q \text{ étant } \theta \text{ ou } \varphi) \quad \text{On}$$

obtient :

$$d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = f_{c_x} dx/d\theta + f_{c_y} dy/d\theta + f_{c_z} dz/d\theta$$

$$d(dL/d\varphi')/dt - dL/d\varphi = f_{c_x} dx/d\varphi + f_{c_y} dy/d\varphi + f_{c_z} dz/d\varphi \quad \text{On obtient :}$$

$$m L_0^2 \theta'' - m L_0^2 \sin\theta \cos\theta \varphi'^2 + m g_a L_0 \sin\theta = f_{c_x} dx/d\theta + f_{c_y} dy/d\theta + f_{c_z} dz/d\theta$$

$$m L_0^2 \sin^2\theta \varphi'' + 2 m L_0^2 \sin\theta \cos\theta \theta' \varphi' = f_{c_x} dx/d\varphi + f_{c_y} dy/d\varphi + f_{c_z} dz/d\varphi$$

$$\mathbf{f_c} = 2 m \mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}$$

$$f_x = 2 m (v_y \Omega_z - v_z \Omega_y) = 2 m (v_\theta \cos\theta \sin\varphi \Omega \sin\lambda_a + v_\varphi \cos\theta \Omega \sin\lambda_a - v_\theta \sin\theta \Omega \cos\lambda_a)$$

$$f_y = 2 m (v_z \Omega_x - v_x \Omega_z) = 2 m (-v_\theta \cos\theta \cos\varphi \Omega \sin\lambda_a + v_\varphi \sin\theta \Omega \sin\lambda_a)$$

$$f_z = 2 m (v_x \Omega_y - v_y \Omega_x) = 2 m (v_\theta \cos\theta \cos\varphi \Omega \cos\lambda_a - v_\varphi \sin\theta \Omega \cos\lambda_a)$$

En reportant dans les équations de Lagrange, on obtient, après simplifications, les équations différentielles du mouvement :

$$\theta'' = -g_a/L_0 \sin\theta + \sin\theta \cos\theta \varphi'^2 + 2 \sin\theta (\cos\theta \sin\lambda_a - \sin\theta \sin\varphi \cos\lambda_a) \Omega \varphi'$$

$$\varphi'' = (-2 \cos\theta \theta' \varphi' - 2 (\cos\theta \sin\lambda_a - \sin\theta \sin\varphi \cos\lambda_a) \Omega \theta')/\sin\theta$$

### 7.3 Équations différentielles pour les petits angles.

Si  $\theta$  est petit,  $\sin\theta = \theta$  et  $\cos\theta = 1$  et  $\sin\lambda_a \gg \theta \sin\varphi \cos\lambda_a$

(on prend naturellement  $\lambda_a$  non nul)

$$\theta'' = -g_a/L_0 \theta + \theta \varphi'^2 + 2 \theta (\sin\lambda_a - \theta \sin\varphi \cos\lambda_a) \Omega \varphi' =$$

$$\theta'' = -g_a/L_0 \theta + \theta \varphi'^2 + 2 \theta \sin\lambda_a \Omega \varphi'$$

$$\theta \varphi'' = -2 \theta' \varphi' - 2 (\sin\lambda_a - \theta \sin\varphi \cos\lambda_a) \Omega \theta' = -2 \theta' \varphi' - 2 \sin\lambda_a \Omega \theta'$$

$$\theta'' = -g_a/L_0 \theta + \theta \varphi'^2 + 2 \theta \sin\lambda_a \Omega \varphi'$$

$$\varphi'' = (-2 \theta' \varphi' - 2 \sin\lambda_a \Omega \theta')/\theta$$

#### Équations cartésiennes :

$$x = L_0 \theta \cos\varphi \quad \text{et} \quad y = L_0 \theta \sin\varphi \quad \text{donc}$$

$$x' = L_0 \theta' \cos\varphi - L_0 \theta \sin\varphi \varphi' \quad \text{et} \quad y' = L_0 \theta' \sin\varphi + L_0 \theta \cos\varphi \varphi' \quad \text{donc}$$

$$x'' = L_0 \theta'' \cos\varphi - L_0 \theta' \sin\varphi \varphi' - L_0 \theta' \sin\varphi \varphi' - L_0 \theta \cos\varphi \varphi'^2 - L_0 \theta \sin\varphi \varphi''$$

$$y'' = L_0 \theta'' \sin\varphi + L_0 \theta' \cos\varphi \varphi' + L_0 \theta' \cos\varphi \varphi' - L_0 \theta \sin\varphi \varphi'^2 + L_0 \theta \cos\varphi \varphi''$$

$$x'' = L_0 \cos\varphi (-g_a/L_0 \theta + \theta \varphi'^2 + 2 \theta \Omega \varphi' \sin\lambda_a) - L_0 \theta' \sin\varphi \varphi' - L_0 \theta' \sin\varphi \varphi' - L_0 \theta \cos\varphi \varphi'^2 - L_0 \sin\varphi (-2 \theta' \varphi' - 2 \Omega \theta' \sin\lambda_a)$$

$$y'' = L_0 \sin\varphi (-g_a/L_0 \theta + \theta \varphi'^2 + 2 \theta \Omega \varphi' \sin\lambda_a) + L_0 \theta' \cos\varphi \varphi' + L_0 \theta' \cos\varphi \varphi' - L_0 \theta \sin\varphi \varphi'^2 - L_0 \cos\varphi (-2 \theta' \varphi' - 2 \Omega \theta' \sin\lambda_a)$$

$$x'' = -g_a \cos\varphi \theta + 2 \Omega \sin\lambda_a (L_0 \theta' \sin\varphi + L_0 \theta \cos\varphi \varphi') = -g_a x/L_0 + 2 \Omega \sin\lambda_a y'$$

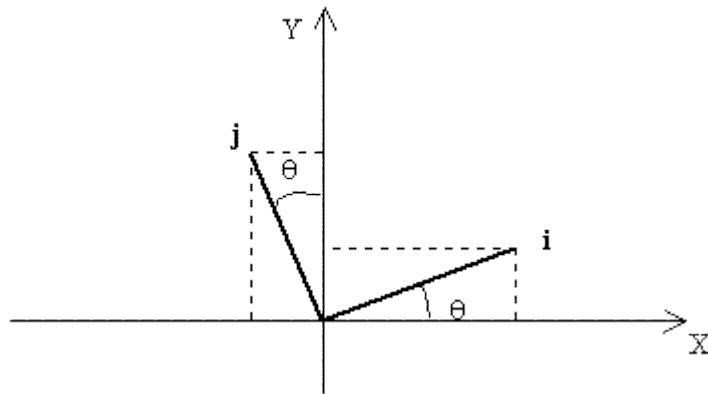
$$y'' = -g_a \sin\varphi \theta - 2 \Omega \sin\lambda_a (L_0 \theta' \cos\varphi - L_0 \theta \sin\varphi \varphi') = -g_a y/L_0 - 2 \Omega \sin\lambda_a x'$$

$$x'' = -g_a x/L_0 + 2 y' \Omega \sin\lambda_a = -\omega_0^2 x + 2 y' \Omega \sin\lambda_a$$

$$y'' = -g_a y/L_0 - 2 x' \Omega \sin\lambda_a = -\omega_0^2 y - 2 x' \Omega \sin\lambda_a$$

(On retrouve les équations du 5.)

## Annexe



$$d\theta/dt = \Omega$$

$$\mathbf{i} \quad \cos \theta$$

$$\mathbf{i} \quad \sin \theta$$

$$\mathbf{i}' \quad -\sin \theta \, dq/dt$$

$$\mathbf{i}' \quad \cos \theta \, dq/dt = \Omega \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} \quad -\sin \theta$$

$$\mathbf{j} \quad \cos \theta$$

$$\mathbf{j}' \quad -\cos \theta \, dq/dt$$

$$\mathbf{j}' \quad -\sin \theta \, dq/dt = -\Omega \mathbf{i}$$