Animation Animation

Série de Fourier

par Gilbert Gastebois

1. Théorème de Fourier

On sait qu'un son musical, qui est une vibration périodique de fréquence N, est constitué d'une vibration sinusoïdale de fréquence N et d'une infinité d'harmoniques sinusoïdaux de fréquence 2N, 3N, 4N, etc. Donc toute fonction périodique doit être constituée d'une somme infinie de fonctions sinusoïdales de fréquence N, 2N, 3N, 4N, etc

On aura $f(t) = a_0 + c_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + c_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \ldots\ldots + c_n \sin(n\omega t + \varphi_n) + \ldots\ldots\ldots$

a_0 représente le décalage éventuel de la fonction par rapport à 0, a_0 est la moyenne de f(t)

On peut écrire cette somme autrement, sous la forme :

$f(t) = a_0 + a_1 \cos\omega t + b_1 \sin\omega t + a_2 \cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t + \ldots\ldots + a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t + \ldots\ldots\ldots$

avec $c_n = (a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ et $\tan\varphi_n = a_n/b_n$

$$\mathbf{f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t}$$

$a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$ sont les coefficients de Fourier de f(t)

2. Coefficients de Fourier

La série de Fourier est tout à fait formidable.... à condition de pouvoir calculer les coefficients a_n et b_n.

a_0 est la moyenne de f(t), donc $a_0 = 1/T \int_0^T f(t)\,dt$

et on montre que $a_n = 2/T \int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt$ et $b_n = 2/T \int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt$ Pourquoi ?

Calculons $\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt$ et $\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt$

$\int_0^T f(t)\cos n\omega t = \int_0^T (a_1 \cos\omega t \cos n\omega t + b_1 \sin\omega t \cos n\omega t + \ldots + \mathbf{a_n \cos n\omega t \cos n\omega t} + \ldots + ..)dt$

Toutes les intégrales sont nulles sauf une, celle qui est en gras et qui vaut $a_n T/2$

donc $\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt = a_n T/2$

$$\mathbf{a_n = 2/T \int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt}$$

On fait la même chose pour b_n

$\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt = \int_0^T (a_1 \cos\omega t \sin n\omega t + b_1 \sin\omega t \sin n\omega t + \ldots + \mathbf{b_n \sin n\omega t \sin n\omega t} + \ldots + ..)dt$

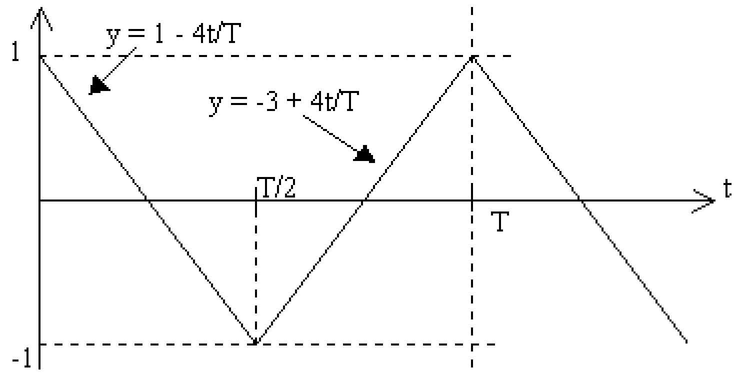
Toutes les intégrales sont nulles sauf une, celle qui est en gras et qui vaut $b_n T/2$

donc $\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt = b_n T/2$

$$b_n = 2/T \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt$$

3. Exemple : Coefficients de Fourier de la fonction triangulaire

3.1 Fonction triangulaire



$f(t) = 1 - 4t/T$ de 0 à $T/2$ et $-3 + 4t/T$ de $T/2$ à T
$f(t)$ étant symétrique par rapport à 0, $a_0 = 0$

3.2 Méthode directe

$$a_n = 2/T\left(\int_0^{T/2} (1 - 4t/T) \cos n\omega t \, dt + \int_{T/2}^{T} (-3 + 4t/T) \cos n\omega t \, dt\right) = 2/T(A_1 + A_2)$$

$$A_1 = \int_0^{T/2} (1-4t/T)\cos n\omega t \, dt = [1/n\omega \sin n\omega t]_0^{T/2} - 4/T([t/n\omega \sin n\omega t]_0^{T/2} + [1/n^2\omega^2 \cos n\omega t]_0^{T/2})$$

$A_1 = 1/n\omega \sin n\pi - 1/n\omega \sin 0 - 4/T(T/2n\omega \sin n\pi - T/2n\omega \sin 0) - 4/T(1/n^2\omega^2 \cos n\pi - 1/n^2\omega^2 \cos 0)$

$\sin k\pi = 0$, donc $A_1 = -4/n^2\omega^2 T \cos n\pi + 4/n^2\omega^2 T$

$A_1 = -4/n^2\omega^2 T \cos n\pi + 4/n^2\omega^2 T = T/n^2\pi^2 (1 - \cos n\pi)$ (On rappelle que $\omega T = 2\pi$)

$$A_2 = \int_{T/2}^{T} (-3+4t/T)\cos n\omega t \, dt = -3[1/n\omega \sin n\omega t]_{T/2}^{T} + 4/T([t/n\omega \sin n\omega t]_{T/2}^{T} + [1/n^2\omega^2 \cos n\omega t]_{T/2}^{T})$$

$A_2 = -3/n\omega \sin 2n\pi + 3/n\omega \sin \pi + 4/T(T/n\omega \sin 2n\pi - T/2n\omega \sin n\pi) + 4/T(1/n^2\omega^2 \cos 2n\pi - 1/n^2\omega^2 \cos n\pi)$

$\sin k\pi = 0$, donc $A_2 = 4/n^2\omega^2 T \cos 2n\pi - 4/n^2\omega^2 T \cos n\pi$ $\cos 2n\pi = 1$, donc

$A_2 = 4/n^2\omega^2 T - 4/n^2\omega^2 T \cos n\pi = T/n^2\pi^2 (1 - \cos n\pi)$ (On rappelle que $\omega T = 2\pi$)

$a_n = 2/T(A_1 + A_2) = 2/T(2T/n^2\pi^2 (1 - \cos n\pi)) = 4/n^2\pi^2 (1 - \cos n\pi)$

$a_n = 4/n^2\pi^2 (1 - \cos n\pi)$

Si n est pair, $a_n = 4/n^2\pi^2 (1 - \cos 2k\pi) = 0$

Si n est impair, $a_n = 4/n^2\pi^2 (1 - \cos (2k+1)\pi) = 8/n^2\pi^2$

donc $a_n = 8/n^2\pi^2$ si n est impair sinon $a_n = 0$

Le même calcul pour b_n donne 0 pour tout n

$$\mathbf{f(t) = 8/\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty}(1/n^2 \cos n\,\omega t) \quad avec\ n\ impair}$$

3.3 Méthode indirecte

Si on dérive la fonction triangulaire, on obtient df/dt : - 4/T de 0 à T/2 et 4/T de T/2 à T
df/dt = - 4/T F(t) F(t) est la fonction carrée : F(t) = 1 de 0 à T/2 et F(t) = -1 de T/2 à T
les coefficients de Fourier de F(t) sont

$$a_n = 2/T \left(\int_0^{T/2} \cos n\,\omega t\, dt + \int_{T/2}^{T} - \cos n\,\omega t\, dt \right)$$

$$a_n = 2/T\,(1/n\omega \sin n\pi - 0 - 1/n\omega \sin 2n\pi + 1/n\omega \sin n\pi) = 0$$

$$b_n = 2/T \left(\int_0^{T/2} \sin n\,\omega t\, dt + \int_{T/2}^{T} - \sin n\,\omega t\, dt \right)$$

$$b_n = 2/T\,(- 1/n\omega \cos n\pi + 1/n\omega + 1/n\omega \cos 2n\pi - 1/n\omega \cos n\pi) = 1/n\pi\ (2 - 2\cos n\pi)$$

$b_n = 0$ si n est pair

$b_n = 4/ n\pi$ si n est pair

$a_n = 0$

Fonction carrée : $\mathbf{F(t) = 4/\pi \sum_{n=1}^{\infty}(1/n \sin n\,\omega t)}$ **avec n impair**

f(t) est la primitive de -4/T F(t) donc

$$f(t) = -16/\pi T \sum_{n=1}^{\infty} (-1/n^2\omega \cos n\,\omega t) \quad \text{avec n impair}$$

$$\mathbf{f(t) = 8/\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^2 \cos n\,\omega t) \quad avec\ n\ impair}$$

Remarque :

Comme en t = 0, pour la fonction triangulaire, f(t) = 1, on a $8/\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 = 1$ avec n impair

donc $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + 1/7^2 + 1/9^2 + \ldots\ldots + 1/(2k+1)^2 = \pi^2/8$. Une manière (pas très efficace) de calculer π

De même pour la fonction carrée, en t = T/4, F(t) = 1

on a $4/\pi \sum_{n=1}^{\infty}(1/n \sin n\pi/2) = 1$ avec n impair

donc $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 + \ldots\ldots - 1/(4k-1) + 1/(4k+1) = \pi/4$.
Une autre manière (pas plus efficace) de calculer π