Satellisation

par Gilbert Gastebois

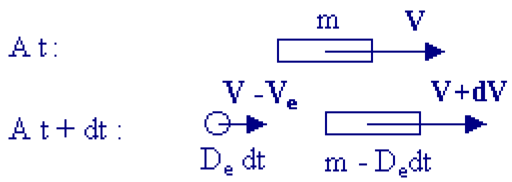
1. Notations

Les vecteurs sont notés en gras
r distance planète-satellite
M masse de la planète
m masse du satellite ou de la fusée
m_0 masse initiale de la fusée (A t = 0)
D_e débit du réacteur (kg/s)
Ve vitesse d'éjection des gaz par rapport au réacteur
Fforce d'attraction newtonienne = GMm/r² $G = 6{,}67259.10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$

2. Équation de Tsiolkovski

2.1 Etude sans force extérieure

Ce cas est valable pour un vaisseau spatial éloigné de tout astre ou pour un satellite sur une orbite circulaire ou pour un satellite au périgée ou à l'apogée d'une orbite elliptique



A l'instant t : $p_1 = mV$

A l'intant t + dt :
$p_2 = (m - D_e\,dt)(V + dV) + D_e\,dt (V - V_e)$

La force de gravitation est nulle ou est sans effet donc la quantité de mouvement se conserve :
$p_1 = p_2$
$mV = (m - D_e\,dt)(V + dV) + D_e\,dt (V - V_e) = m V - D_e\,dt\,V + m\,dV + D_e\,dt\,V -$
$D_e\,dt\,V_e = m V + m\,dV - D_eV_e\,dt$
$dV = D_eV_e\,dt / m$

$$\mathbf{dV/dt = D_eV_e / m}$$

A l'instant t : $m = m_0 - D_e\,t$
donc $dV = D_eV_e /(m_0 - D_e\,t)\,dt$
On pose $u = m_0 - D_e\,t$, on alors $du = - D_e\,dt$ et $dV = -V_e /u\,du$
On intègre de 0 à t (V passe de V_0 à V et u passe de m_0 à $m = m_0 - D_e\,t$, on obtient

$\mathbf{V - V_0 = \Delta V = V_e\,Ln(m_0/(m_0 - D_e\,t)) = V_e\,Ln(m_0/m)}$ Équation de Tsiolkovski sans force extérieure

Remarque : Cette expression montre que, pour une masse éjectée donnée, le gain de vitesse est proportionnel à la vitesse d'éjection. Cela explique l'intérêt des ingénieurs pour le moteur ionique. Ce moteur accélère du xénon ionisé à la vitesse de 30 km/s ce qui est environ dix fois plus que les moteurs chimiques traditionnels. A masse éjectée égale, on obtient une vitesse finale dix fois plus grande.
Cependant, ce moteur a un débit extrêmement faible (de l'ordre de 3 ou 4 mg/s) donc une poussée très faible (de l'ordre de 0,1 N), il n'est pas adapté à la propulsion des fusées au décollage, mais est très performant pour la propulsion de vaisseaux spatiaux ou pour les corrections d'orbite. On peut grâce à lui, envoyer dix fois moins de carburant dans le satellite, ce qui diminue sa masse et donc son coût de lancement ou bien multiplier par dix son temps d'utilisation, ce qui est aussi très économique.
Pour les vaisseaux spatiaux, on obtient une vitesse plus importante, ce qui diminue leur temps de parcours.

2.2 Etude avec force extérieure

Ce cas est valable pour une fusée s'élevant verticalement
On a alors d'après la deuxième loi de Newton : $p_2 - p_1 = - mg\, dt - f\, dt$
$g = GM/r^2$ et f force de frottement
$m\, dV - D_e V_e\, dt = - mg\, dt - f\, dt$

$$\mathbf{dV/dt = D_e V_e/m - g - f/m}$$

Si on néglige le frottement f et que l'on considère que g est presque constant, alors l'intégration de cette expression donne
$V - V_0 = \Delta V = V_e \, Ln(m_0 / (m_0 - D_e t)) - g\, t = V_e \, Ln(m_0 / m) - g\, t$
$t = (m_0 - m)/D_e$
$$\mathbf{V - V_0 = \Delta V = V_e \, Ln(m_0 /(m_0 - D_e t)) - g(m_0 - m)/D_e = V_e \, Ln(m_0 / m) - g(m_0 - m)/D_e}$$
Équation de Tsiolkovski avec champ de pesanteur constant et sans frottement

Exemple : Première phase du lancement d'Ariane 5
$m_0 = 700$ tonnes, $D_e = 3900$ kg/s, $V_e = 3600$ m/s,
$m = 260$ tonnes, $g_{moyen} = 9{,}7$ m/s², $V_0 = 0$
On obtient une vitesse finale de 2470 m/s. La valeur réelle est de 2000 m/s.
On obtient un ordre de grandeur convenable compte tenu de la non prise en compte des frottements de l'air.

2.3 Frottement de l'air

$$\mathbf{f = C\, \mu\, S\, v^2}$$

C ~ 0,25 S Section (m²) μ masse volumique de l'air (kg/m³) v vitesse (m/s)

μ dépend de l'altitude z (en km).

On peut prendre $\mu = 1.23\,(1 - z/30)^{2.46}$ pour $z <= 15$ km

et $\mu = 0.224/\exp(0{,}12(z - 15))$ pour $z > 15$ km

3. Temps de propulsion et masse éjectée

On étudie le cas sans force extérieure :
$\Delta V = V_e \,\mathrm{Ln}(m_0 / (m_0 - D_e t))$ donc $m_0 / (m_0 - D_e t) = \exp(\Delta V/V_e)$
ou $(m_0 - D_e t) = m_0 \exp(- \Delta V/V_e)$
$m_e = D_e t = m_0 - m_0 \exp(- \Delta V/V_e) = m_0 (1 - \exp(- \Delta V/V_e))$

$$\mathbf{t = m_0/D_e (1 - \exp(- \Delta V/V_e))}$$

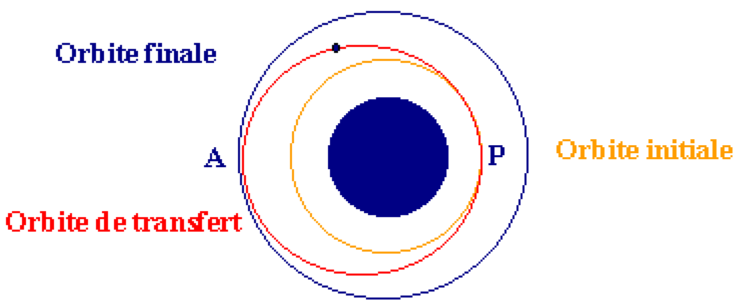
$$\mathbf{m_e = m_0 (1 - \exp(- \Delta V/V_e))}$$

4. Fusées à étages : Pourquoi ?

Contrairement à la fusée utilisée par Tintin pour aller marcher sur la Lune, nos fusées ont des étages, en général trois. On peut se demander pourquoi une telle complication et on peut répondre qu'il n'est sans doute pas très subtil d'emmener toute la fusée à 600 km d'altitude alors qu'on ne veut y placer qu'un satellite de quelques centaines de kilos. Voyons cela.

On prend l'exemple de la fusée Ariane et on prend un seul étage.
A la fin de la première phase, on a :
Masse : 210 tonnes. Masse de la structure : 83 tonnes. Vitesse d'éjection : 3600 m/s.
Débit du réacteur : 3900 kg/s. Altitude : 70 km.
Vitesse : 2000 m/s. g_{moyen} = 9,3 m/s²
$V_{finale} = 2000 + V_e \,\mathrm{Ln}(m_0 / m) - g(m_0 - m)/D_e = 5000$ m/s
altitude atteinte : $h = 70 + V_{moyen}\, t = 70 + V_{moyen} (m_0 - m)/D_e = 150$ km
Le calcul de l'altitude est très approximatif, mais donne une valeur raisonnable. Ni la vitesse ni l'altitude ne sont suffisantes, c'est donc le crash assuré. La solution de l'étage unique ne fonctionne pas.

5. Modification de l'altitude d'un satellite. Orbite de transfert



On transfère le satellite depuis son orbite circulaire initiale de rayon R_1 vers une autre orbite circulaire finale de rayon R_2 par l'intermédiaire d'une orbite elliptique, l'orbite de transfert. Une première impulsion en P fait passer le satellite sur l'orbite de transfert et une seconde en A le fait passer sur son orbite finale.

Sur l'orbite initiale, le satellite a une vitesse $V_1 = (GM/R_1)^{1/2}$
Sur l'orbite finale, le satellite a une vitesse $V_2 = (GM/R_2)^{1/2}$

Le demi grand axe de l'orbite de transfert vaut a = $(R_1 + R_2)/2 = R_1/(2 - R_1V_P{}^2/(GM))$

(Cf : Mvt elliptique)

On en déduit $V_P{}^2 = 2GM(1/R_1 - 1/(R_1+R_2))$ ou $\mathbf{V_P = (2GMR_2/(R_1(R_1+R_2)))^{1/2}}$

La masse à éjecter au point P est donc $\mathbf{m_p = m(1 - exp(- (Vp - V_1)/V_e))}$

Au point A, la vitesse du satellite vaut :$\mathbf{V_A = V_P\, R_1/R_2 = (2GMR_1/(R_2(R_1+R_2)))^{1/2}}$

La masse à éjecter au point P est donc $\mathbf{m_A = (m - m_p)(1 - exp(- (V_2 - V_A)/V_e))}$

Exemple : Lancement d'un satellite météo de masse m_0 = 1000 kg (320 kg utiles) sur l'orbite géostationnaire à partir d'une orbite basse à 600 km d'altitude avec un moteur chimique.

Ve = 3500 m/s

R_1 = 6970 km, R_2 = 42156 km

V_1 = 7566 m/s, V_2 = 3076 m/s

$V_P = (2GMR_2/(R_1(R_1+R_2)))^{1/2} = 9912$ m/s

$m_P = m_0(1 - exp(- (Vp - V_1)/V_e)) = 488$ kg

$V_A = V_P\, R_1/R_2 = 1639$ m/s

$m_A = (m_0 - m_p)(1 - exp(- (V_2 - V_A)/V_e)) = 195$ kg

Cela fait presque 700 kg de combustible pour 320 kg utiles !! Avec un moteur ionique, 50 kg suffiraient... à condition d'être patient, puisqu'il faudrait 6 mois pour mettre le satellite sur orbite géostationnaire !

Remarque : Les satellites placés sur une orbite basse (<500 km) subissent une lente "érosion" de leur orbite à cause du très faible frottement sur l'atmosphère terrestre résiduelle. Ce frottement leur fait décrire une orbite en spirale. Il faut donc régulièrement remonter le satellite sur son orbite.

Les variations de vitesse sont très faibles, on peut donc faire des développements limités des expressions précédentes.

$V_2 = (GM/R_2)^{1/2} = (GM/(R_1 + h))^{1/2} = V_1(1 - h/(2R_1))$ $h = R_2 - R_1 << R_1$

$V_P = (2GMR_2/(R_1(R_1+R_2)))^{1/2} = V_1(1 + h/(4R_1))$

$m_P = m_0(1 - exp(- (Vp - V_1)/V_e)) = m_0(Vp - V_1)/V_e = m_0\, hV_1/(4R_1V_e)$

$V_A = V_P\, R_1/R_2 = V_p(1 - h/R_1) = V_1\,(1 - 3h/(4R_1)) = V_2 - V_1h/(4R_1)$

$m_A = (m_0 - m_p)(1 - exp(- (V_2 - V_A)/V_e)) = m_0\, hV_1/(4R_1V_e) = m_P$

Exemple : La station spatiale internationale de masse m_0 = 400 tonnes, située à l'altitude de 334 km (R_1 = 6700 km et V_1 = 7,7 km/s) perd h = 27 m par jour.

$m_A = m_P = m_0\, hV_1/(4R_1V_e) = 3100/V_e$ kg/jour (On obtient une consommation de 2 kg par jour ou de 200 g avec un moteur ionique)