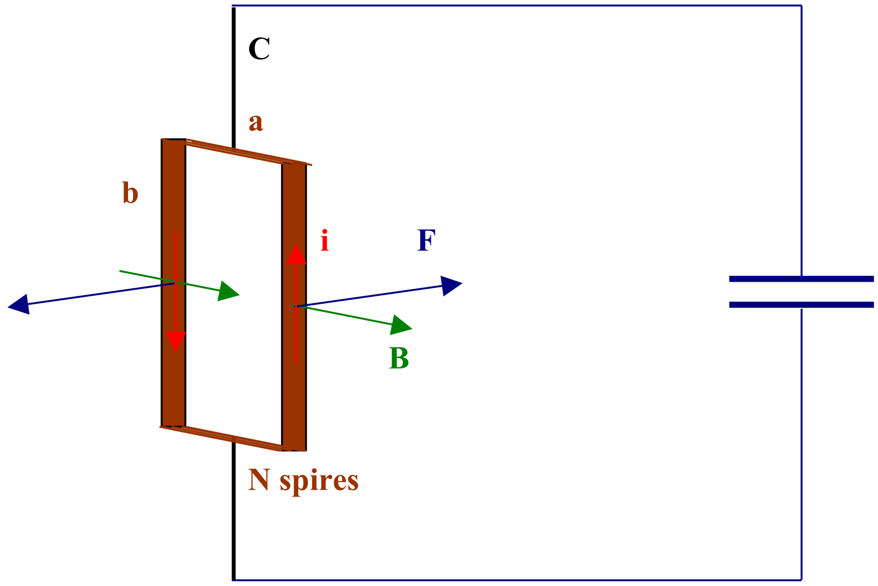
Le Galvanomètre

par Gilbert Gastebois

1. Galvanomètre balistique

1.1. Relation entre charge et déviation



B champ magnétique radial donc F toujours perpendiculaire au plan du cadre

$F = N\,i\,b\,B$

$S = ab$ Surface du cadre

$M_{torsion} = - C\,\theta$

Relation de Newton : $J\theta'' = \Sigma\, M_{Forces}$ (J Moment d'inertie du cadre)

Le cadre est à l'équilibre. On libère la charge du condensateur, le temps de décharge est très inférieur à la période du cadre ce qui fait qu'à la fin de la décharge, le cadre n'a pas tourné d'un angle significatif, il a seulement acquis une certaine vitesse angulaire θ'.

$J\,\theta'' = 2\,M_F$ (On néglige le frottement de l'air sur le cadre)

$J\,\theta'' = 2\,F\,a/2 = F\,a$ ($F = N\,i\,b\,B$ (Loi de Laplace))

$J\,\theta'' = N\,i\,b\,B\,a = NSB\,i$ ($S = ab$ est la surface du cadre)

On intègre la relation de 0 à l'infini, on obtient :

$J\theta' = NSB\,Q$ (Q est la charge du condensateur)

$\theta' = NSB/J\;\;Q$

L'énergie cinétique $Ec = ½\,J\,\theta'^{\,2}$ se transforme en énergie potentielle $Ep = ½\,C\,\theta_m^{\,2}$

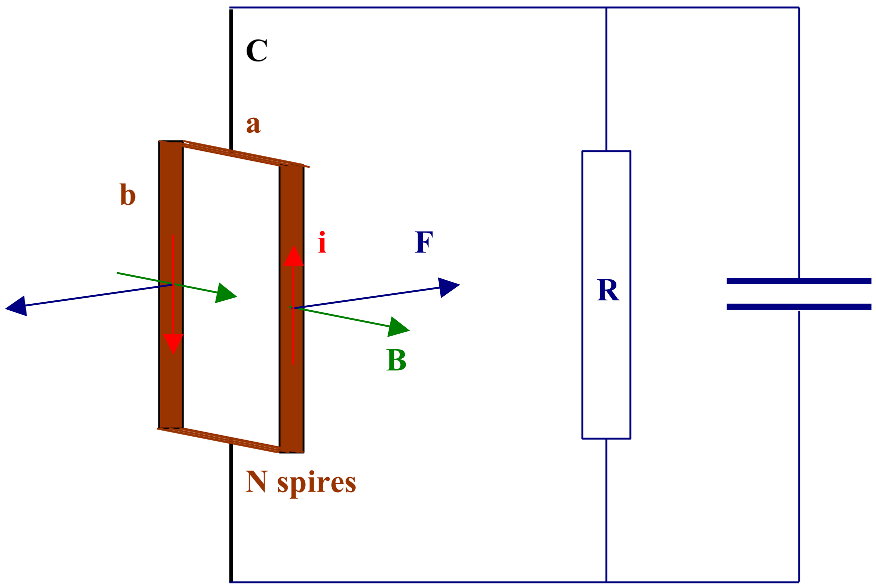
A l'arrêt, on a $½\,C\,\theta_m^{\,2} = ½\,J\,\theta'^{\,2}$ donc

$\theta_m = (J/C)^{1/2}\;\;\theta' = NSB/(JC)^{1/2}\;\;Q$ En posant $\omega_0^{\,2} = C/J$ on obtient

$Q = J\omega_0/(NSB)\;\;\theta_m$ **Q est donc proportionnel à θ_m**

1.2. Freinage électromagnétique du cadre

1.2.1 Expression du courant induit



B champ magnétique radial donc F toujours perpendiculaire au plan du cadre

$F = N\ i\ b\ B$

$S = ab$ Surface du cadre

$M_{torsion} = - C\ \theta$

Le cadre tourne dans un champ magnétique radial, il se crée donc une f.e.m d'induction.

Les électrons subissent la force de Lorentz $f = q\ v\ B = q\ E_e$ E_e champ électromoteur

la f.e.m e est l'inverse de l'intégrale de E_e le long du circuit plongé dans le champ B

$e = - E_e\ 2Nb = - 2NbB\ v$

$v = a/2\ \ \theta'$ donc $e = - 2NbB\ a/2\ \ \theta' = - NSB\ \theta'$ ($S = ab$ est la surface du cadre)

$i = e/R$ (R résistance totale du circuit)

$\mathbf{i = - NSB/R\ \ \theta'}$

1.2.2 Étude de l'oscillation du cadre

$\mathbf{J\theta'' = \Sigma\ M_{Forces}}$

$J\ \theta'' = 2\ M_F\ - C\ \theta$ (On néglige le frottement de l'air sur le cadre)

$J\ \theta'' = 2\ F\ a/2\ \ - C\ \theta = F\ a\ \ - C\ \theta$ ($F = N\ i\ b\ B$ (Loi de Laplace))

$J\ \theta'' = N\ i\ b\ B\ a - C\ \theta = NSB\ i - C\ \theta\ \ = - N^2S^2B^2/R\ \ \theta' - C\ \theta$

$\theta'' + N^2S^2B^2/(RJ)\ \ \ \theta' + C/J\ \ \theta = 0$

$\mathbf{\theta'' + \gamma\ \ \theta' + \omega_0^2\ \theta = 0}$ (En posant $\gamma = N^2S^2B^2/(RJ)$ et $\omega_0^2 = C/J$)

Solutions de l'équation (Cliquer ici)

Si $\gamma < 2\ \omega_0$ On a une oscillation pseudo-périodique

Si $\gamma > 2\ \omega_0$ On a un retour apériodique à l'équilibre

Si $\gamma = 2\ \omega_0$ On a un retour apériodique à l'équilibre le plus rapide (Régime critique)

La résistance critique $\mathbf{R_c = N^2S^2B^2/(2J\omega_0)}$

1.2.3 Application numérique

On utilise un fil de cuivre de section $A = 10^{-8}$ m² enroulé sur un cadre carré de masse $m_o = 0{,}028$ g et de a = 1 cm de côté sur N = 73,5 tours, placé dans un champ radial B = 0,179 T

Fil de torsion $C = 1{,}184.10^{-8}$ N.m/rd

La masse volumique $\mu = 8960$ kg/m³ et la résistivité $\rho = 1{,}7.10^{-8}\ \Omega$.m

La masse du cuivre $m_c = \mu\ A\ 4\ N\ a = 2{,}6.10^{-4}$ kg

Le moment d'inertie d'un cadre carré $J = m\ a^2/6 = (m_o + m_c)\ a^2/6 = 4{,}80.10^{-9}$ kg.m²

La résistance du cadre $r = \rho\ \ 4\ N\ a/A = 5\ \Omega$

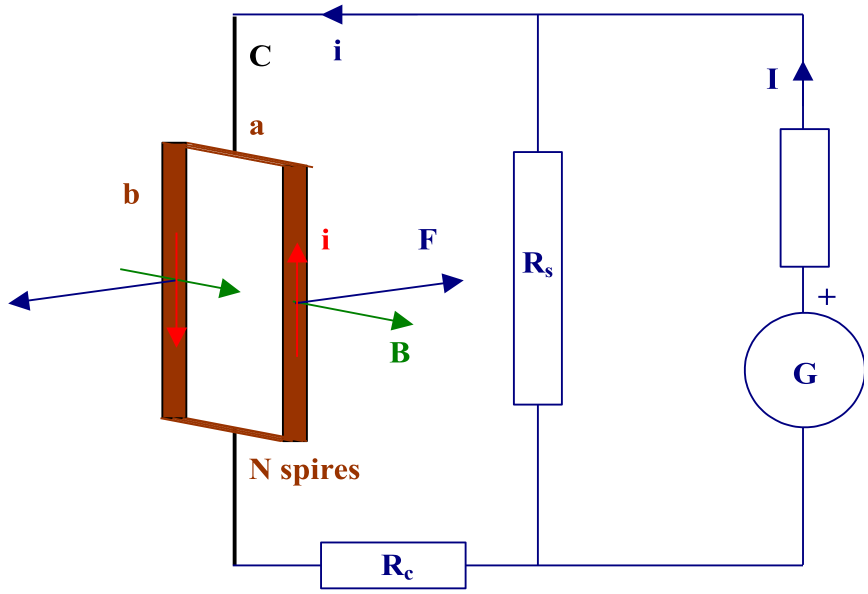
La pulsation du cadre $\omega_0 = (C/J)^{1/2} = 1{,}57$ rd/s

$\mathbf{Q = J\omega_0/(NSB)\ \theta_m = 5{,}72.10^{-6}\ \theta_m = 1.10^{-7}\ \theta_{m\ (en\ °)}}$

$\mathbf{R_c = N^2S^2B^2/(2J\omega_0) = 115\ \Omega}$ **donc** $\mathbf{R = 110\ \Omega}$

2. Milliampèremètre

2.1. Relation entre intensité et déviation



B champ magnétique radial donc F toujours perpendiculaire au plan du cadre

$F = N\ i\ b\ B$

$S = ab$ Surface du cadre

$R_s << R_c$ donc

$i << I$

$U = R_s(I - i) = R_s\ I$

Le cadre est en régime critique.

$M_{torsion} = -\ C\ \theta$

En tournant dans le champ magnétique, le cadre génère une f.e.m d'induction $e = NBS\ \theta'$.

$\mathbf{J\theta'' = \Sigma\ M_{Forces}}$

$J\ \theta'' = 2\ M_F\ -\ C\ \theta$ (On néglige le frottement de l'air sur le cadre)

$J\ \theta'' = 2\ F\ a/2\ -\ C\ \theta = F\ a\ -\ C\ \theta$ ($F = N\ i\ b\ B$ (Loi de Laplace))

$i = (\ U - e\ )/R_c = (\ R_S\ I\ -\ NSB\ \theta'\ )/R_c$ donc $F = NB\ b\ (\ R_S\ I\ -\ NSB\ \theta'\ )/R_c$

$J\ \theta'' = NBS\ R_S/R_c\ \ I\ -\ N^2S^2B^2/R_c\ \ \theta'\ -\ C\ \theta$

$\mathbf{\theta'' + N^2S^2B^2/(JR_c)\ \theta' + C/J\ \ \theta = NBS\ R_S/(JR_c)\ I}$

$\theta'' + \gamma\ \theta' + \omega_0^2\ \theta = KI$ (En posant $\gamma = N^2S^2B^2/(JR_c)$, $K = NBS\ R_S/(JR_c)$ et $\omega_0^2 = C/J$)

On pose $\theta_e = \theta - K/\omega_0^2\ I$, on obtient

$\theta_e'' + \gamma\ \theta_e' + \omega_0^2\ \theta_e = 0$

Étant en régime critique $\gamma = 2\ \omega_0$ et partant de l'immobilité à $\theta_e = - K/\omega_0^2\ I$
On a (Cliquer ici pour le calcul) :

$\theta_e = - K/\omega_0^2\ I\ (\ 1 + \omega_0 t\ )\ \exp(- \omega_0\ t)$

$\theta = K/\omega_0^2\ I\ (\ 1 - (\ 1 + \omega_0 t\ )\ \exp(- \omega_0\ t))$

Quand t tend vers l'infini, on obtient l'équilibre ($C\ \theta_m = J\omega_0^2\ \theta_m = NBSR_S/R_c\ \ I$) pour :

$\theta_m = NBS\ R_S/(JR_c\omega_0^2\ )\ I$

D'autre part, $R_c = N^2S^2B^2/(2J\omega_0)$ donc

$\boldsymbol{\theta_m = 2\ R_S/(NSB\omega_0)\ I}$

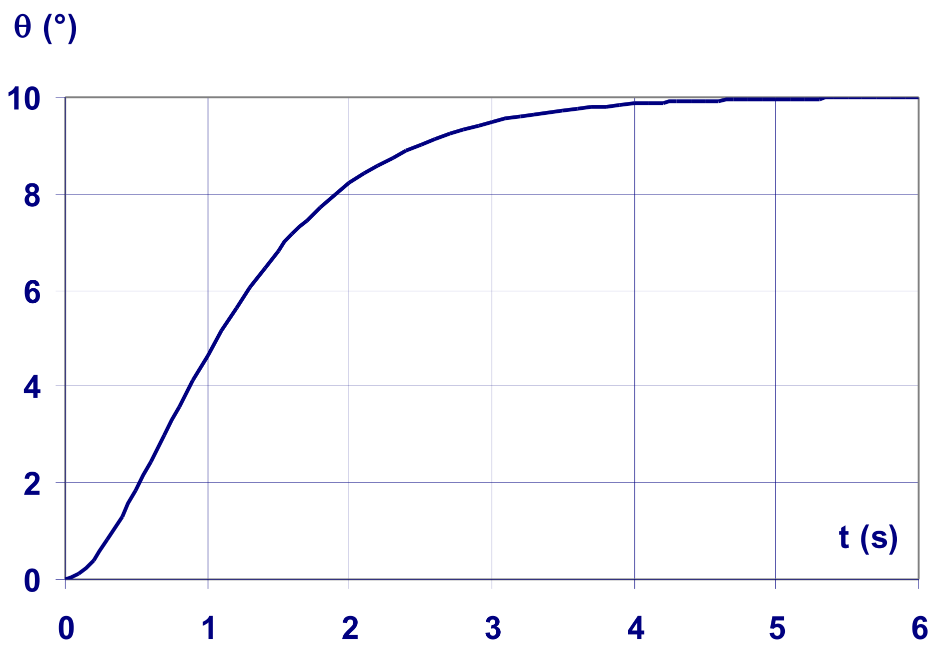
2.2 Exemple :

$N = 73{,}5$ tours, $B = 0{,}179$ T, $S = 10^{-4}$ m² et $\omega_0 = 1{,}57$ rd/s

On veut que $\theta_m =$ en degrés soit égal à I en mA

En degrés, $\theta_m = 0{,}36\ R_S/(\pi\ NSB\omega_0)\ I$ Il faut donc que $0{,}36\ R_S/(\pi\ NSB\omega_0) = 1$

$R_S = 0{,}0180\ \Omega$ (ce qui est très inférieur à R_c qui vaut 115 Ω)



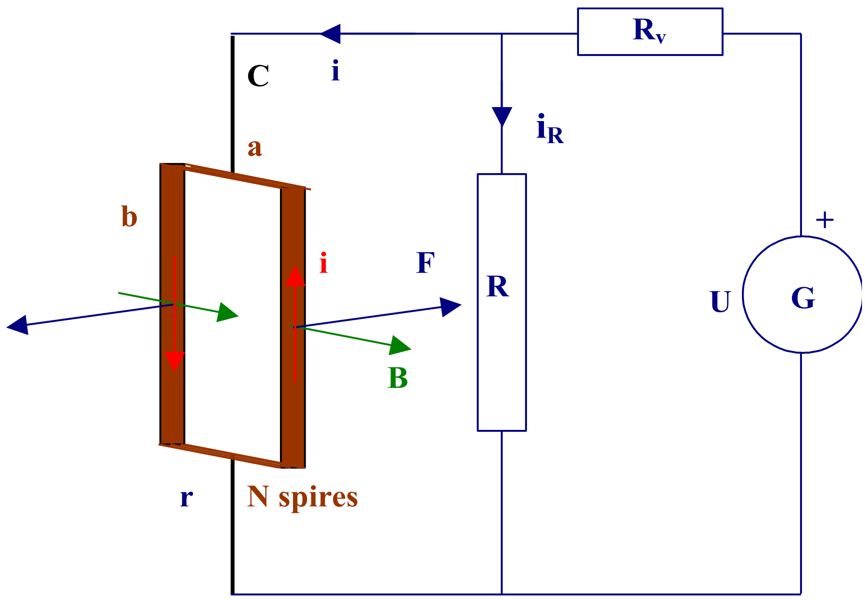
I = 10 mA

$\theta_m = 10$ °

$\boldsymbol{\theta = 10\ (\ 1 - (\ 1 + 1{,}57\ t\ )\ e^{-1{,}57\ t}\ )}$

3. Voltmètre

3.1. Relation entre tension et déviation



B champ magnétique radial donc F toujours perpendiculaire au plan du cadre

$F = N\, i\, b\, B$

$S = ab$ Surface du cadre

$R_v >> r$ et $R_v >> R$

le cadre est en régime critique donc

$R + r = R_c$

$U = R_v(i + i_R) + R\, i_R$

$M_{torsion} = - C\, \theta$

En tournant dans le champ magnétique, le cadre génère une f.e.m d'induction $e = NBS\, \theta'$.

$\mathbf{J\theta'' = \Sigma\, M_{Forces}}$

$J\, \theta'' = 2\, M_F - C\, \theta$ (On néglige le frottement de l'air sur le cadre)

$J\, \theta'' = 2\, F\, a/2 - C\, \theta = F\, a - C\, \theta$ ($F = N\, i\, b\, B$ (Loi de Laplace))

On a $R\, i_R = r\, i + e$ et $R\, i_R = U - R_v\, (i + i_R)$ ou $i_R = (U - R_v\, i)/(R_v + R)$

En remplaçant i_R et en négligeant r et R devant R_v, sachant que $R + r = R_c$ on obtient :

$i = U\, R/(R_c\, R_v) - e/R_c = U\, R/(R_c R_v) - NSB\, \theta'/R_c$ donc
$F = NB\, b\, (U\, R/(R_c\, R_v) - NSB\, \theta'/R_c\,)$

$J\, \theta'' = NBS\, (U\, R(R_c\, R_v) - N^2S^2B^2/R_c\, \theta' - C\, \theta$

$\mathbf{\theta'' + N^2S^2B^2/(JR_c)\, \theta' + C/J\, \theta = NBSR/(JR_cR_v)\, U}$

$\theta'' + \gamma\, \theta' + \omega_0^2\, \theta = KU$ (En posant $\gamma = N^2S^2B^2/(JR_c)$, $K = NBSR/(JR_cR_v)$ et $\omega_0^2 = C/J$)

On pose $\theta_e = \theta - K/\omega_0^2\, U$, on obtient

$\theta_e'' + \gamma\, \theta_e' + \omega_0^2\, \theta_e = 0$

Étant en régime critique $\gamma = 2\, \omega_0$ et partant de l'immobilité à $\theta_e = - K/\omega_0^2\, U$
On a (Cliquer ici pour le calcul) :

$\theta_e = - K/\omega_0^2\, U\, (\, 1 + \omega_0\, t\,)\, \exp(- \omega_0\, t)$

$\theta = K/\omega_0^2\, U(\, 1 - (\, 1 + \omega_0\, t\,)\, \exp(- \omega_0\, t))$

Quand t tend vers l'infini, on obtient l'équilibre ($C\, \theta_m = J\omega_0^2\, \theta_m = NBSR/(R_cR_v)\, U$) pour :

$\mathbf{\theta_m = NBSR/(JR_cR_v\omega_0^2)\, U}$

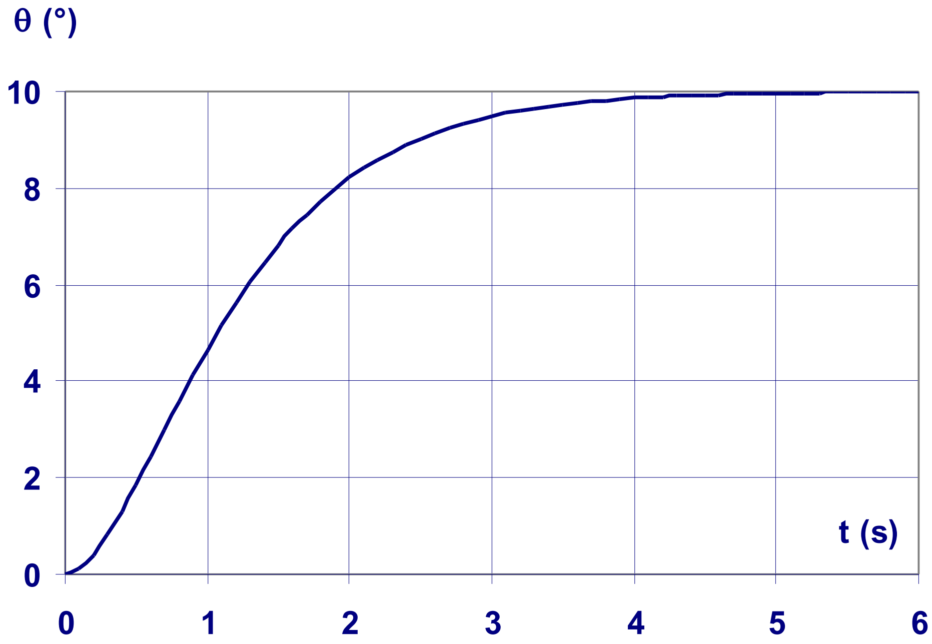
3.2 Exemple :

N = 73,5 tours, B = 0,179 T, S = 10^{-4} m² ω_0 = 1,57 rd/s r = 5 Ω et J = $4{,}80.10^{-9}$ kg.m²
R_c = 115 Ω donc R = 110 Ω

On veut que θ_m = en degrés soit égal à U en V

En degrés, $\theta_m = 180\ NBSR/(\pi\ JR_cR_v\omega_0^2)\ U$ Il faut donc que $180\ NBSR/(\pi\ JR_cR_v\omega_0^2) = 1$

$R_v = 6{,}11.10^6\ \Omega$ (ce qui est très supérieur à r et à R)



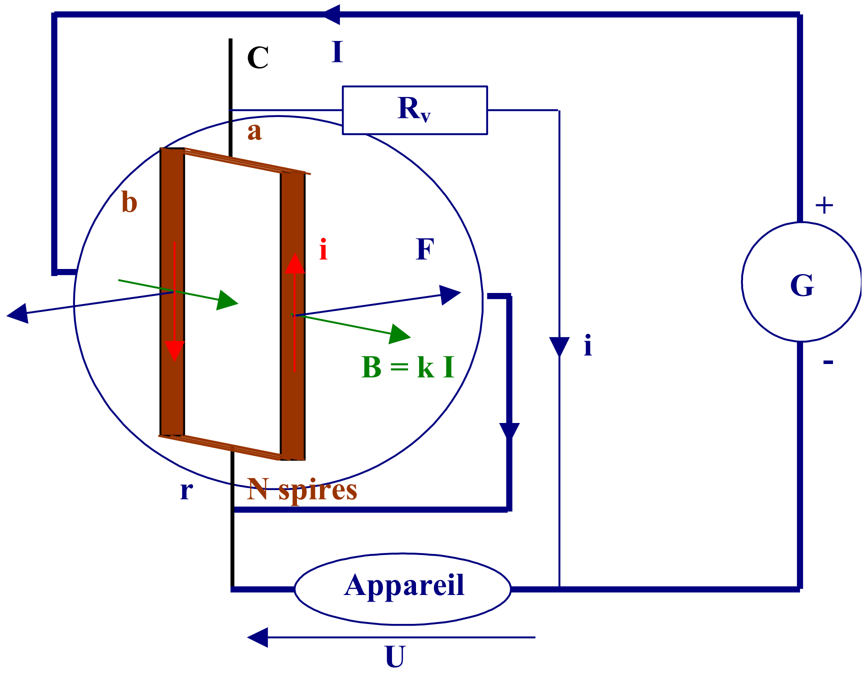
U = 10 V

θ_m = 10 °

$\theta = 10\ (\ 1 - (\ 1 + 1{,}57\ t\ )\ e^{-1{,}57\ t}\ )$

4. Wattmètre

4.1. Relation entre puissance et déviation



Un wattmètre est un voltmètre à la différence près que le champ magnétique qui baigne le cadre, au lieu d'être fixe, est produit par le courant qui passe dans le circuit. $B = k\,I$

Comme B est variable, on ne peut pas compter sur un freinage électromagnétique, il faut ajouter un freinage mécanique fluide critique au cadre.

On reprend la théorie du voltmètre sans shunt R et avec frottement fluide $M_f = - h\,\theta'$:

$\mathbf{J\theta'' = \Sigma\, M_{Forces}}$

$J\,\theta'' = 2\,M_F + M_f - C\,\theta$

$J\,\theta'' = 2\,F\,a/2 - h\,\theta' - C\,\theta = F\,a - h\,\theta' - C\,\theta$ ($F = N\,i\,b\,B$ (Loi de Laplace))

On a $U = R_v\,i + r\,i + e = R_v\,i + e$ car $r \ll R_v$

$i = U/R_v - e/R_v = U/R_v - NSB\,\theta'/R_v$ donc
$F = NB\,b\,(U/R_v - NSB\,\theta'/R_v)$

$J\,\theta'' = NBS\,(U/R_v - NSB/R_v\ \theta') - h\,\theta' - C\,\theta = NBS\,U/R_v - h\,\theta' - C\,\theta$ car $N^2B^2S^2/R_v \ll h$

Comme $B = k\,I$, on obtient :

$\boldsymbol{\theta'' + h/J\,\theta' + C/J\ \theta = kNS/(JR_v)\ P}$ car $P = UI$

$\theta'' + \gamma\ \theta' + \omega_0^2\,\theta = K\,P$ (En posant $\gamma = h/J$, $K = kNS/(JR_v)$ et $\omega_0^2 = C/J$)

On pose $\theta_e = \theta - K/\omega_0^2\,P$, on obtient

$\theta_e'' + \gamma\ \theta_e' + \omega_0^2\,\theta_e = 0$

Étant en régime critique $\gamma = 2\,\omega_0$ ($h = 2\,J\,\omega_0$) et partant de l'immobilité à $\theta_e = - K/\omega_0^2\,P$
On a (Cliquer ici pour le calcul) :

$\theta_e = - K/\omega_0^2\,P\,(\,1 + \omega_0\,t\,)\,\exp(- \omega_0\,t)$

$\theta = K/\omega_0^2\,P\,(\,1 - (\,1 + \omega_0\,t\,)\,\exp(- \omega_0\,t))$

Quand t tend vers l'infini, on obtient l'équilibre ($C\,\theta_m = J\omega_0^2\,\theta_m = kNS/R_v\ P$) pour :

$\boldsymbol{\theta_m = kNS/(JR_v\omega_0^2)\,UI = kNS/(JR_v\omega_0^2)\,P}$

4.2 Cas du courant alternatif

Le wattmètre fonctionne aussi bien en courant alternatif.

On a $u = U_m \cos(\omega t)$ et $i = I_m \cos(\omega t + \phi)$

$\theta_m = kNS/(JR_v\omega_0^2)\, u\, i = kNS/(JR_v\omega_0^2)\, U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)$

$\omega \gg \omega_0$ donc le cadre ne peut pas suivre, on obtient la moyenne de θ_m

$\theta_m = kNS/(JR_v\omega_0^2) <U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)>_{\text{sur une période}}$

$<U_m I_m \cos(\omega t) \cos(\omega t + \phi)>_{\text{sur une période}} = U_m I_m/2 \cos\phi = U I \cos\phi = P_{\text{en courant alternatif}}$

U et I étant les valeurs efficaces de u et i donc

$\boldsymbol{\theta_m = kNS/(JR_v\omega_0^2)\, P}$