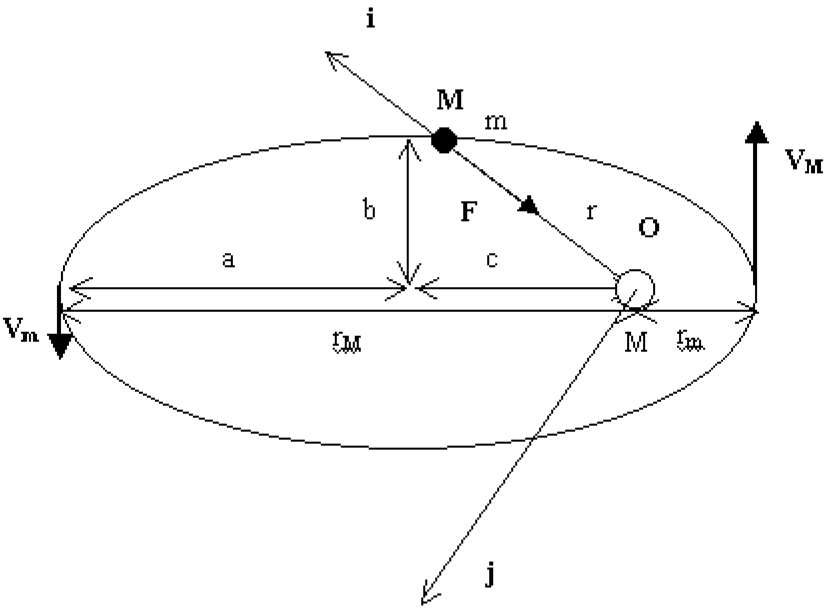
Animation

# Gravitation Newtoniène

Animation

**par Gilbert Gastebois**

## 1. Trajectoire d'un satellite




On a un problème à deux corps qui tournent autour de leur centre d'inertie commun, cependant on peut traiter le problème d'une masse tournant autour de l'autre considérée comme fixe si on remplace la masse tournante par sa masse réduite $\mu$ telle que
$\underline{\mu = Mm/(M + m)}$ et M par $M_t = M + m$

On étudie alors le mouvement de m vu de M ( ou de M vu de m )
Si la masse m du satellite est négligeable devant la masse M de la planète, ce qui est le cas général dans le système solaire à l'exception du système Pluton-Charon, $\mu = m$ , la planète est immobile et $M_t = M$

**Notations :** Les vecteurs sont notés en gras
$\omega = d\theta/dt$ $\omega' = d\omega/dt$ $r' = dr/dt$ $r'' = d^2r/dt^2$
$\mathbf{i}' = d\mathbf{i}/dt = \underline{\omega\,\mathbf{j}}$ $\mathbf{j}' = d\mathbf{j}/dt = \underline{-\omega\,\mathbf{i}}$

r distance planète-satellite On pose u = 1/r
M masse de la planète
m masse du satellite
$r_0$ distance initiale du satellite
$v_0$ vitesse initiale du satellite
$r_m$ distance minimale d'approche du satellite ( périgée )
$v_M$ vitesse maximale du satellite ( périgée )
$r_M$ distance maximale du satellite ( apogée )
$v_m$ vitesse minimale du satellite ( apogée )
**F** force d'attraction newtonienne = $- GMm/r^2\,\mathbf{i}$ $G = 6{,}67259.10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$

Loi de newton : $\mu \mathbf{a} = \mathbf{F} = - GmM/r^2\ \mathbf{i} = - G\mu M_t/r^2\ \mathbf{i}$ avec $\mathbf{a} = d^2\mathbf{OM}/dt^2$

d'où $d^2\mathbf{OM}/dt^2 = - GM_t/r^2\ \mathbf{i}$

En coordonnées polaires (repère 0ij tournant avec le satellite ) :

$\mathbf{OM} = r\ \mathbf{i}$

$d\mathbf{OM}/dt = r'\ \mathbf{i} + r\ \mathbf{i'} = r'\ \mathbf{i} + r\omega\ \mathbf{j}$

$d^2\mathbf{OM}/dt^2 = r''\ \mathbf{i} + r'\omega\ \mathbf{j} + r'\omega\ \mathbf{j} + r\ \omega'\ \mathbf{j} - r\omega^2\ \mathbf{i} = (r''- r\omega^2)\ \mathbf{i} + (2r'\omega + r\omega')\ \mathbf{j} = \mathbf{a_r} + \mathbf{a_e} + \mathbf{a_c} + \mathbf{a_\theta}$

or $d^2\mathbf{OM}/dt^2 = - GM_t/r^2\ \mathbf{i}$ , donc :

$r'' - r\omega^2 = - GM_t/r^2$ et $2r'\omega + r\omega' = 0$, mais $2r'\omega + r\omega' = 1/r\ d(r^2\omega)/dt$, donc $d(r^2\omega)/dt = 0$ et par conséquent $r^2\omega = K$ ( K est une constante qui représente $L/\mu$ L est le moment cinétique )

**L est donc constant, ce qui est caractéristique des mouvements à force centrale**

On prend $u = 1/r$

On a : $r'' = - GM_t/r^2 + r\omega^2 = - GM_t\ u^2 + K^2\ u^3$ car $r\omega^2 = r\ K^2/r^4 = K^2\ u^3$

En remplaçant $\omega$ par $K/r^2$ ou par $Ku^2$, on a :

$du/d\theta = d(1/r)/d\theta = d(1/r)/dt\ .dt/d\theta = d(1/r)/dt\ .\ 1/\omega = - r'/(r^2\omega) = - r'/K$

et $d^2u/d\theta^2 = d(- r'/K)/d\theta = d(- r'/K)/dt.dt/d\theta = d(- r'/K)/dt.1/\omega = - r''/(K\omega) = - r''/(K^2\ u^2)$

comme $r'' = - GM_t\ u^2 + K^2\ u^3$, on obtient :

$\mathbf{d^2u/d\theta^2 + u = GM_t/K^2}$ équation simple dont la solution est :

$u = 1/r = GM_t/K^2\ (\ 1 + e\ \cos\theta\ )$

$\mathbf{r = K^2/(GM_t(\ 1 + e\ \cos\ \theta\ ))}$

C'est l'équation d'une ellipse ( si e<1 ) de grand axe a, de petit axe b et d'excentricité e

$r_m = K^2/(GM_t(\ 1 + e\ ))$ et $r_M = K^2/(GM_t(\ 1 - e\ ))$ donc

$e = K^2/(GM_t\ r_m) - 1$

et $\mathbf{e = (r_M - r_m)/\ (r_m + r_M)}$ $\mathbf{a = \frac{1}{2}\ (r_m + r_M)}$ $\mathbf{b = (r_m\ r_M)^{1/2}}$

$\mathbf{c = \frac{1}{2}\ (r_M - r_m) = e\ a}$

$K^2 = 2\ GM_t\ r_m\ r_M/(r_m + r_M) = GM_t b^2/a$ $r_M = v_M^2\ r_m^2/(2GM_t - v_M^2\ r_m)$

$K = v_M\ r_m = v_m\ r_M$

$\mathbf{K = v_M\ r_m = v_m\ r_M = (GM_t b^2/a)^{1/2}}$

$a = \frac{1}{2}\ (r_m + r_M) = \frac{1}{2}\ K^2/GM_t\ (1/(1+e) + 1/(1-e)) = K^2/(GM_t\ (1 + e^2))$

$\mathbf{r = a(1 + e^2)/(\ 1 + e\ \cos\ \theta\ ))}$ **donc** $\mathbf{r_m = a(1 - e)}$ **et** $\mathbf{r_M = a(1 + e)}$

**Équation de la trajectoire r = f(θ)**

$$\mathbf{r = a(1 - e^2)/(\ 1 + e\ \cos\ \theta\ ))}$$

$$\mathbf{r = v_M^2\ r_m^2/(GM_t((v_M^2\ r_m/(GM_t\ ) - 1)\ \cos\theta + 1))}$$

**Remarques:**

- Si e = 1, on a alors un mouvement parabolique ( limite d'une ellipse pour e = 1 ), la vitesse $v_M$ vaut alors $v_{lib} = (2GM_t/r_m)^{½}$ qui représente la vitesse de libération du satellite
- Si e>1, $v_M > (2GM_t/r_m)^{½}$, on a un mouvement hyperbolique, situé entre les angles $\theta_1$ et $-\theta_1$ tels que : $\theta_1 = \mathrm{acos}(-1/e)$
- Si e = 0, $v_M = (GM_t/r_m)^{½}$, on a $r = v_M^2 r_m^2/(GM_t) = r_m$ = constante, le mouvement est circulaire. Mais $K = r^2\omega$ = constante, donc
  si r = constante, ω = constante, donc <u>si le mouvement est circulaire, il doit être uniforme.</u>
  Le mouvement est circulaire uniforme de rayon $r_0$ et de vitesse
  $v_0 = v_{circ} = (GM_t/r_0)^{½}$
  A proximité du sol terrestre, $v_{circ}$ est voisin de 8 km/s et $v_{lib}$ de 11 km/s.

## 2. Loi des aires

$K = r^2\omega = r^2 d\theta/dt$, donc $r^2 d\theta = K dt$
$r^2 d\theta = r\, rd\theta = 2dS$ ( dS élément de surface de l'ellipse )
$2\, dS = K\, dt$ ou $dS = K/2\, dt$
**$dS/dt = K/2$**
**Loi des aires : $dS/dt = K/2$, la surface balayée par seconde est constante**
**$S = ½\, v_M\, r_m\, t$, la surface balayée est proportionnelle au temps.**

## 3. Période du satellite - 3ème loi de Kepler

$dS = K/2\, dt$
On intègre sur un tour complet :
$dS = K/2\, dt \Rightarrow S_e = K/2\, T$ ( $S_e$ surface de l'ellipse = ab et T période du mouvement ) donc

**$T = 2ab/K = 2\pi(a^3/(GM_t))^{½}$** car $K^2 = Gm_t b^2/a$ donc $a^2b^2/K^2 = a^3/(GM_t)$ et

$ab/K = (a^3/(GM_t))^{½}$

d'où $T^2 = 4\pi^2 a^3/(GM_t)$ donc

**$T^2/a^3 = 4\pi^2/GM_t$ 3ème loi de Kepler**

## 4. Énergie mécanique du satellite

### 4.1 Énergie potentielle

l'énergie potentielle à la distance a est l'intégrale de a à l'infini de la force de gravitation, donc

$E = \int_a^{\infty} - GMm/r^2 dr = - Gmm/a$ donc à la distance r

**$E_p = - Gmm/r = - G\mu M_t/r$**

### 4.2 Énergie mécanique

$E_m = E_c + E = \frac{1}{2}\mu v^2 - G\mu M_t/r$

la force de gravitation est conservative donc $E_m$ = constante, donc on peut calculer $E_m$ en tout point de la trajectoire, par exemple au départ :

$E_m = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - G\mu M_t/r_0$ ou au périgée où $r = r_m$ et $v = v_M$ donc

$E_m = \frac{1}{2}\mu v_M^2 - G\mu M_t/r_m$ et $v_M^2 = K^2/r_m^2 = 2\,GM_t/r_m\ r_M/(r_m + r_M)$

$E_m = G\mu M_t/r_m\ r_M/(r_m + r_M) - G\mu M_t/r_m = - G\mu M_t/r_m (1 - r_M/(r_m + r_M)) = - G\mu M_t/(r_m + r_M)$

$$\mathbf{E_m = - G\mu M_t/(r_m + r_M) = - \frac{1}{2} G\mu M_t/a = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - G\mu M_t/r_0}$$

$$\mathbf{et\ \ a = r_0/(2 - r_0 v_0^2/(GM_t))}$$

**Remarque :** $a = - \frac{1}{2} G\mu M_t/E_m$ or $E_m$ ne dépend que de la vitesse initiale $v_0$ et de la distance initiale $r_0$ et pas du tout de la direction de la vitesse ( $E_m = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - G\mu M_t/r_0$) par conséquent le demi-grand axe de l'ellipse n'en dépend pas et ainsi la période T n'en dépend pas non plus. Bien sûr, c'est la valeur de b qui change, l'ellipse est plus ou moins aplatie selon la direction du lancement, mais a et T sont identiques.

Si $v_0 = (2GM_t/r_0)^{\frac{1}{2}}$, a tend vers l'infini donc cette vitesse représente la vitesse de libération du satellite : $v_{lib} = (2GM_t/r_0)^{\frac{1}{2}} = (2)^{\frac{1}{2}}\ v_{circ}$

($v_{circ} = (GM_t/r_0)^{\frac{1}{2}}$ est la vitesse permettant d'avoir une trajectoire circulaire )

Si $v_0 > v_{lib}$, la trajectoire est hyperbolique.

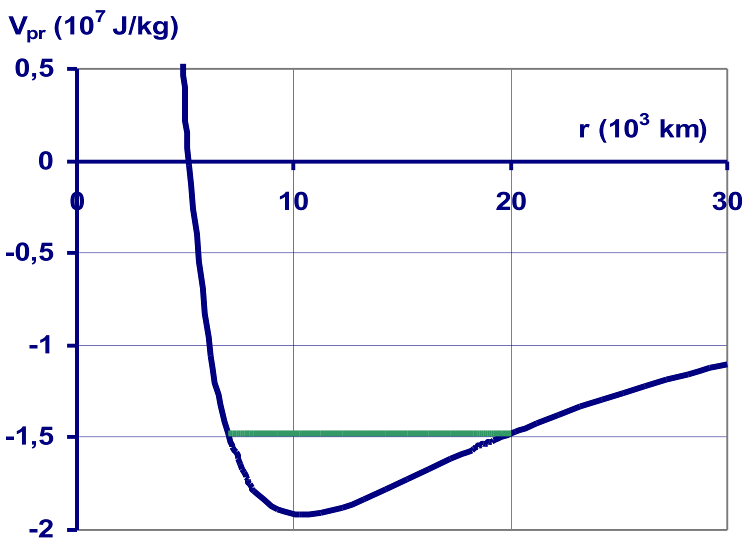
A proximité du sol terrestre, $v_{circ}$ est voisin de 8 km/s et $v_{lib}$ de 11 km/s.

### 4.3 Autre approche

On peut écrire l'énergie mécanique sous la forme suivante :

$E_m/\mu = \frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) - GM/r = \frac{1}{2} v_r^2 + \frac{1}{2} r^2\omega^2 - GM/r = E_{c\,r}/\mu + \frac{1}{2} K^2/r^2 - GM/r$

$E_m/\mu = E_{c\,r}/\mu + V_{p\,r}$ $E_{c\,r}$ est l'énergie cinétique radiale et $V_{p\,r}$ est le potentiel apparent




$\mathbf{V_{pr} = \frac{1}{2} K^2/r^2 - GM/r}$

$GM = 3{,}986.10^{14}\ m^3/s^2$

$r_0 = 7000$ km

$v_0 = 9{,}185$ km/s

$K = r_0 v_0 = 6{,}429.10^{10}\ m^2/s$

$r_{min} = 7000$ km

$r_{max} = 20000$ km

$E_m/\mu = -1{,}476.10^7$ J/kg

$r_c = 10370$ km

$E_{m\,c}/\mu = V_{pr}\ min = - 1{,}922.10^7$ J/kg

$V_{pr}$ tend vers 0- à l'infini donc si $E_m >= 0$ le satellite est libéré de l'attraction de la planète

Si $E_m < 0$, le mobile se déplace entre les deux valeurs de r pour lesquelles $E_{cr}$ s'annule :

On a alors $E_m/\mu = V_{pr}$

Si $E_m/\mu = V_{pr}$ mini, $E_{cr}$ est toujours nul, donc r est constant, cela correspond à la trajectoire circulaire. On a alors $r_c = K^2/(GM)$

La trajectoire circulaire correspondant au minimum de $V_{pr}$, c'est la raison qui fait que les disques de poussières autour des étoiles ( ou les anneaux de Saturne ) deviennent circulaires au fur et à mesure qu'ils perdent de l'énergie au cours de leur formation.

## 5. Trajectoire en coordonnées cartésiennes

### 5.1 Équation de la trajectoire

On a $r = R/(e \cos\theta + 1)$ avec $R = K^2/(GM_t)$ $(K = v_M r_m = v_m r_M)$

On prend l'origine du repère au centre de l'astre central et l'axe des $x$ comme axe de symétrie de l'ellipse donc sur $x$ :

$\theta = 0$ et ainsi, $\cos\theta = x/r$

$1/r = (e \cos\theta + 1)/R = (e\, x/r + 1)/R$ donc, en multipliant par r, $e\, x/R + r/R = 1$ et

$r = R - e\, x$

$r = R - e\, x$ donc $r^2 = e^2 x^2 - 2\, e\, x\, R + R^2$

$r^2 = x^2 + y^2 = e^2 x^2 - 2\, e\, R\, x + R^2$ donc $\mathbf{y^2 = -(1 - e^2)\, x^2 - 2\, e\, R\, x + R^2}$

En décalant l'axe des $x$ au milieu des deux foyers, on aura une équation plus simple de la forme $y^2/b^2 + x^2/a^2 = 1$ ( Équation caractéristique d'une ellipse)

On prend $x = X - x_f$ et $Y = y$ on a alors :

$Y^2 = -(1 - e^2)(X - x_f)^2 - 2\, e\, (X - x_f)\, R + R^2$

$Y^2 = -(1 - e^2)\, X^2 - (1 - e^2)\, x_f^2 + 2\,(1 - e^2)\, X\, x_f - 2\, e\, RX + 2\, e\, R\, x_f + R^2$

Si on prend $x_f = e\, R/(1 - e^2) = c$, distance du foyer à l'origine des axes, il reste :

$Y^2 = -(1 - e^2)\, X^2 - (1 - e^2)\, x_f^2 + 2\, e\, R\, x_f + R^2$

$Y^2 = -(1 - e^2)\, X^2 - e^2 R^2/(1 - e^2) + 2\, e^2 R^2/(1 - e^2) + R^2$

$Y^2 = -(1 - e^2)\, X^2 + e^2 R^2/(1 - e^2) + R^2 = -(1 - e^2)\, X^2 + R^2(e^2/(1 - e^2) + 1)$

$Y^2 = -(1 - e^2)\, X^2 + R^2/(1 - e^2)$ donc $Y^2 + (1 - e^2)\, X^2 = R^2/(1 - e^2)$

$Y^2/(R^2/(1 - e^2)) + X^2/(R^2/(1 - e^2)^2) = 1$

On pose $R^2/(1 - e^2) = b^2$ et $R/(1 - e^2) = a$, ce qui donne $R = b^2/a$ et $1 - e^2 = b^2/a^2$

$c = e\, R/(1 - e^2) = e\, a = a(1 - b^2/a^2)^{1/2} = (a^2 - b^2)^{1/2}$

On a alors, comme prévu :

**Équation de la trajectoire $Y = f(X)$**

$$\mathbf{Y^2/b^2 + X^2/a^2 = 1}$$

$$\mathbf{a = K^2/(GM_t(1 - e^2)) \qquad b = (a\, K^2/(GM_t))^{1/2} \qquad c = (a^2 - b^2)^{1/2}}$$

Remarque si e =1, on a $y^2 = -2R\,x + R^2$ équation d'une parabole coupant l'axe des $x$ à $x = r_m = K^2/(2GM_t)$

Si e>1, $a = K^2/(GM_t(e^2-1))$ et $b = K^2/(GM_t(e^2-1)^{½})$ on obtient $Y^2/b^2 - X^2/a = -1$ équation d'une hyperbole

### 5.2 Distance focale de l'ellipse

Les foyers sont à la distance $x_f = e\,R/(1-e^2)$ (Les deux foyers sont donc distants de $2\,x_f$)

$R^2 = b^4/a^2$ $e = c/a$ et $1 - e^2 = b^2/a^2$ donc

$\boldsymbol{x_f = c}$

### 5.3 Relations avec l'équation polaire

$\mathbf{Y^2/b^2 + X^2/a^2 = 1}$ ( l'ellipse est le lieu des points où la somme des distances aux deux foyers vaut 2a )

$r = R/(e\cos\theta + 1)$ avec $R = K^2/(GM_t) = b^2/a$ et $e = c/a$ et $c = (a^2 - b^2)^{½}$

$\mathbf{r = b^2/((a^2 - b^2)^{½}\cos\theta + a)}$

## 6. Forces de marée

### 6.1 marées terrestres

Les marées sont dues à la différence de l'attarction de la Lune et dans une moindre valeur du Soleil sur les différentes parties de la surface terrestre.

Le potentiel appliqué par la Lune sur un point de la surface terrestre de coordonnées x, y et z, l'origine O étant au centre de la Terre et z pointant dans la direction Lune-Terre, est :

$V_L = E_p/m = -GM_L/r$ $\mathbf{r = r_L + R}$ $\mathbf{r_L}$ étant le vecteur représentant la distance Lune-Terre

R rayon de la Terre : $R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \ll r_L$

$r = (r_L^2 + R^2 + 2\mathbf{r_L.R})^{1/2} = (r_L^2 + R^2 + 2r_L z)^{1/2}$

$V_L = -GM_L/(r_L^2 + x^2 + y^2 + z^2 + 2r_L z)^{1/2}$

$a = -\text{grad}(V_L)$

$a_x = -\partial V_L/\partial x = -½\,GM_L(2x)/(r_L^2 + R^2 + 2r_L z)^{3/2}$

$a_x = -GM_L\,x/r_L^3$ en négligeant R et z devant $r_L$

De même $a_y = -GM_L\,y/r_L^3$

$a_z = -\partial V_L/\partial z = -½\,GM_L(2z + 2r_L)/(r_L^2 + R^2 + 2r_L z)^{3/2}$

$a_z = -½\,GM_L(2z + 2r_L)\,(1 - 3R^2/(2r_L^2) - 3z/r_L)/r_L^3$

$a_z = -GM_L/r_L^2 + 2GM_L\,z/r_L^3$ en négligeant R devant $r_L$

$-GM_L/r_L^2$ est l'accélération du centre de la Terre donc si on ne considère que l'accélération par rapport au centre terrestre, l'accélération de marée, on a :

$a_x = -GM_L\,x/r_L^3$

$a_y = -GM_L\,y/r_L^3$ $a_x$ et $a_y$ correspondent à un rétrécissement latéral

$a_z = 2GM_L\,z/r_L^3$ $a_z$ correspond à un renflement de chaque côté de la Terre pour $z = \pm R$

$a = -\text{grad}(\Phi_L)$ $\Phi_L$ étant le potentiel relatif des forces de marée

On obtient donc :

$\Phi_L = GM_L (x^2 + y^2 - 2 z^2)/(2r_L^3)$

Ce potentiel s'ajoute au potentiel terrestre $V_T = - GM_T/(R + h)$ ($h << R$ hauteur de la marée)

$\Phi = GM_L (x^2 + y^2 - 2 z^2)/(2r_L^3) - GM_T/(R + h) = GM_L (x^2 + y^2 - 2 z^2)/(2r_L^3) - GM_T(1- h/R)/R$

En surface, le potentiel est constant donc si on compare les deux points : $z = \pm R$ et $x = \pm R$

$- 2 GM_L R^2/(2r_L^3) - GM_T(1 - h_M/R)/R = GM_L R^2/(2r_L^3) - GM_T(1 - h_m/R)$ donc en simplfiant :

$\mathbf{h_M - h_m = 3M_L R^4/(2M_T r_L^3)}$

$h_M - h_m$ est la différence de hauteur entre marée haute et marée basse ou marnage

Pour tenir compte de l'effet du Soleil, il faut prendre les deux cas extrêmes :

Soleil et Lune alignés : $\mathbf{h_M - h_m = 3M_L R^4/(2M_T r_L^3) + 3M_S R^4/(2M_T r_S^3)}$ **Vive eau**

Soleil et Lune à 90° : $\mathbf{h_M - h_m = 3M_L R^4/(2M_T r_L^3) - 3M_S R^4/(2M_T r_S^3)}$ **Morte eau**

A.N : $M_T = 6.10^{24}$ kg  $M_L = 7{,}35.10^{22}$ kg  $M_S = 2.10^{30}$ kg  $R = 6400$ km

$r_L = 384000$ km  $r_S = 150.10^6$ km

Vive eau : $h_M - h_m = 0{,}79$ m

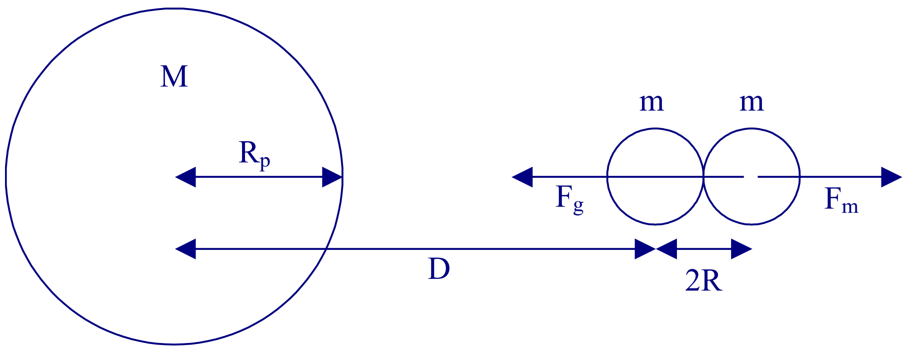
Morte eau : $h_M - h_m = 0{,}30$ m

Ces valeurs semblent bien faibles, on connait par exemple le marnage du mont St Michel qui atteint les 15 mètres !

Les valeurs calculées supposent que la surface soit entièrement liquide, mais sur Terre, il y a des continents et des bassins océaniques. Ces bassins se comportent comme des oscillateurs amortis qui sont forcés par les forces de marée. On a donc une possibilité de résonance et ainsi des amplitudes très supérieures à l'amplitude de l'excitateur. Si la période propre du bassin océanique est proche de 12,4 heures, on peut avoir une grande amplitude. C'est le cas du mont St Michel et de la baie de Fundy au Canada.

### 6.2 Limite de Roche

Les forces de marée peuvent être suffisantes pour disloquer un satellite s'il est trop proche de sa planète. Cette distance minimale est appelée la limite de Roche de la planète.




On prend un satellite constitué de deux sphères identiques de masse m et de rayon R.

La sphère extérieure se détachera si la force de marée $F_m$ due à la planète, l'emporte sur la force de gravitation $F_g$ qui la lie à sa voisine.

$F_g$ force de gravitation entre les deux masses m : $F_g = Gm^2/(2R)^2$

$F_m$ force de marée créée par la planète : $F_m = 2GmM(2R)/D^3$

A la limite de Roche : $4GmM R/D_R^3 = Gm^2/(4R^2)$ donc $D_R^3 = R^3(16M/m)$

$M = 4/3\ \pi\ \rho_p\ R_p^3$ $m = 4/3\ \pi\ \rho_S\ R^3$ ($\rho_p$ et $\rho_S$ masses volumiques de la planète et du satellite)

$D_R^3 = R^3(64/3\ \pi\ \rho_p\ R_p^3/(4/3\ \pi\ \rho_S\ R^3)) = 16\ \rho_p\ R_p^3/\rho_S$

$\mathbf{D_R = R_p\,(16\ \rho_p/\rho_S)^{1/3} \simeq 2{,}52\ R_p\,(\rho_p/\rho_S)^{1/3}}$

Une théorie plus précise considérant le satellite comme une goutte fluide donne :

$D_R \simeq 2{,}42\ R_p\ (\rho_p/\rho_S)^{1/3}$ ce qui est proche, mais la formule est de toute façon approximative car elle suppose que le satellite n'a pas de cohésion interne ou que cette cohésion est négligeable par rapport aux forces de marées, ce qui suppose que le satellite soit assez grand, son rayon doit être en général supérieur à plusieurs kilomètres.

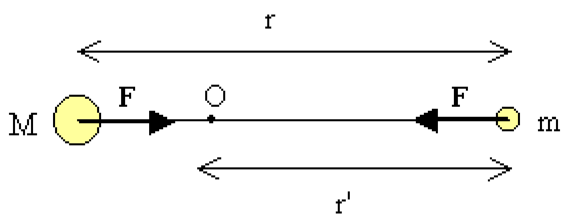
Grâce à leur cohésion, plusieurs petites lunes se trouvent légèrement à l'intérieur de la limite de Roche de leur planète. De même la plupart des satellites artificiels de la Terre se trouvent bien à l'intérieur de la limite de Roche de la Terre ( environ 15000 km ) sans aucun problème. Les anneaux de Saturne sont à l'intérieur de la limite de Roche et il leur est ainsi impossible de s'agréger pour former une lune.

### 6.3 Spaghettisation au voisinage des trous noirs

Au voisinage d'un trou noir peu massif de rayon voisin de quelques kilomètres, les forces de marées sont gigantesques ($a/z \sim 10^8\ s^{-2}$), elles étirent l'objet selon z et l'écrasent selon x et y, ce qui donne un objet en forme de spaghetti. S'il est assez malléable, bien sûr...

Pour les trous noirs supermassifs de rayon voisin de plusieurs millions de kilomètres, les forces de marées sont faibles ($a/z \sim 10^{-2}\ s^{-2}$) même à proximité de son horizon.

## 7. Étude de la gravitation dans le repère du centre de masse




Les deux masses gravitent autour de leur barycentre 0. On a alors $r' = M/(M+m) = M/M_t\ r$

La masse m subit la force $F = GMm/r^2 = GMm/((M+m)^2/M^2\ r'^2) = (GMm\ /\ (1+m/M)^2)/r'^2$

$F = G\ M'm/r'^2$ si $M' = M/(1+ m/M)^2 = M^3/M_t^2$ donc tout se passe comme s'il y avait une masse $M' = M^3/M_t^2$ en O et tous les calculs précédents sont corrects à condition de remplacer systématiquement $M_t$ par M' et r par r' dans toutes les formules et de considérer les vitesses et les accélérations par rapport à un repère lié à O.

Pour le mouvement de l'autre masse M, il faut remplacer $M_t$ par $M'' = m^3\ /M_t^2$ et r par $r'' = m/M_t\ r$

Les deux masses décrivent donc des ellipses dont le foyer commun est O avec la même période T et des demis grands axes a' et a".

$a' = M/M_t\ a$ et $a'' = m/M_t\ a$ donc $a'/a'' = M/m$

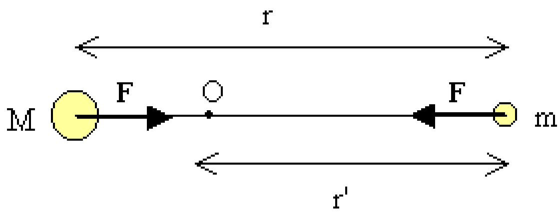
$T^2 = 4\pi^2 a'^3/(GM') = 4\pi^2 a''^3/(GM'')$

$a'^3/(GM') = a^3\ M^3/(M_t^3\ GM^3/M_t^2) = a^3/(GM_t)$

$a''^3/(GM'') = a^3\ m^3/(M_t^3\ Gm^3\ /M_t^2) = a^3/(GM_t)$

donc on retrouve bien la période donnée par la loi de Kepler : $T^2 = 4\pi^2\ a^3/(GM_t)$

## Masse réduite μ




On pose **OM** = $\mathbf{r_1}$ et **Om** = **r'** donc **r = Mm = MO + Om = r' - $\mathbf{r_1}$**

Loi de Newton : M $d^2\mathbf{r_1}/dt^2 = Gmm/r^2$ **i** et m $d^2r'/dt^2 = -Gmm/r^2$ **i**

ou $d^2\mathbf{r_1}/dt^2 = 1/M\ Gmm/r^2$ i et $d^2\mathbf{r'}/dt^2 = -1/m\ Gmm/r^2$ **i**

On fait la différence entre les deux expressions : $d^2(\mathbf{r'} - \mathbf{r_1})/dt^2 = -(1/m + 1/M)\ Gmm/r^2$ **i**

$d^2\mathbf{r}/dt^2 = -1/\mu\ GMm/r^2$ **i** ou $\mu\ d^2\mathbf{r}/dt^2 = -GMm/r^2$ **i** en posant $1/\mu = 1/M + 1/m$ ou

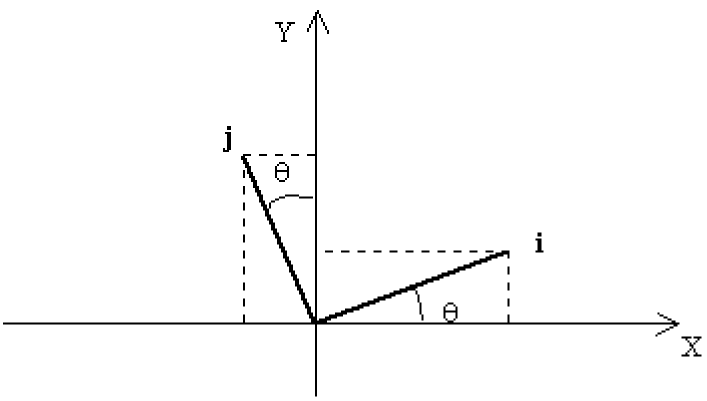
$$\boldsymbol{\mu = Mm/(M + m) = Mm/M_t}$$

On obtient $\mu\ d^2\mathbf{r}/dt^2 = -GMm/r^2\ \mathbf{i} = -Gm_t\mu/r^2\ \mathbf{i}$

On a donc l'équivalent d'une masse μ gravitant à la distance r de $M_t$ considéré comme fixe.

---

## Dérivées des vecteurs unitaires tournants, i et j




$$\mathbf{i}\ \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{vmatrix} \qquad \mathbf{j}\ \begin{vmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{i'}\ \begin{vmatrix} -\sin\theta\ d\theta/dt \\ \cos\theta\ d\theta/dt \end{vmatrix} = \omega\ \mathbf{j} \qquad \mathbf{j'}\ \begin{vmatrix} -\cos\theta\ d\theta/dt \\ -\sin\theta\ d\theta/dt \end{vmatrix} = -\ \omega\ \mathbf{i}$$