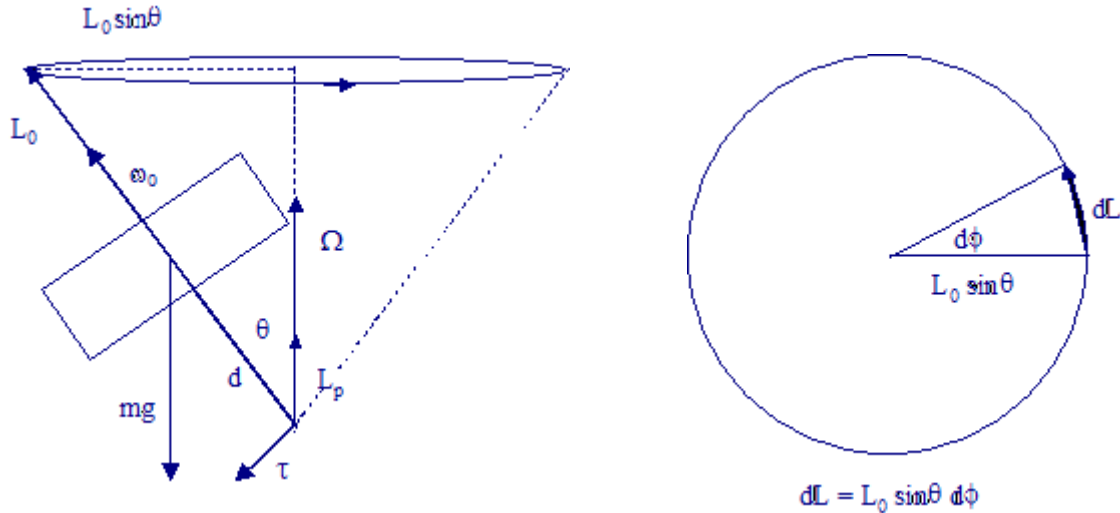


## 1. Schémas



## 2. Étude du mouvement d'une toupie ( sans nutation ).

Une toupie est un gyroscopie dont l'une des extrémités de l'axe est posée sur le sol sans possibilité de glissement.

$\omega_0$  : vitesse angulaire de rotation du gyroscopie autour de son axe

$d$  : distance entre le centre de gravité du disque et le point de contact de son axe avec le sol

$I$  : moment d'inertie du gyroscopie autour de son axe

$I_p$  : moment d'inertie du gyroscopie autour de l'axe verticale de précession

$L$  : vecteur moment cinétique total du gyroscopie

$L_0$  : vecteur moment cinétique du gyroscopie autour de son axe  $L_0 = I\omega_0$

$L_p$  : vecteur moment cinétique du gyroscopie autour de la verticale ( précession )

$\theta$  : angle du gyroscopie avec la verticale

$\phi$  : angle du gyroscopie autour de la verticale

$\Omega$  : vitesse angulaire de rotation du gyroscopie autour de la verticale ( vitesse angulaire de précession )

$\tau$  : vecteur moment du poids par rapport au point de contact avec le support

Loi de Newton pour un solide tournant :  $dL/dt = \tau$

$$dL_x/dt = \tau_x = mgd \sin\theta \cos\phi$$

$$dL_y/dt = \tau_y = mgd \sin\theta \sin\phi$$

$$dL_z/dt = \tau_z = 0$$

$$dL_z/dt = \tau_z = 0 \Rightarrow L_z = \text{constante}$$

C'est la constance de  $L_z$  qui explique la précession du gyroscopie, en effet quand on abandonne le gyroscopie, il tend à s'incliner sous l'effet de  $\tau$ , ce faisant,  $L_{0z}$  diminue, il faut donc un terme supplémentaire  $L_p$  pour maintenir  $L_z$  constante, ce terme provient de la précession du gyroscopie autour de l'axe verticale à la vitesse angulaire  $\Omega$

### 3. Vitesse angulaire de précession.

$dL = L \sin\theta \, d\varphi$  ( Voir schéma )

$$dL/dt = L \sin\theta \, d\varphi/dt \quad d\varphi/dt = \Omega$$

$$dL/dt = L \Omega \sin\theta \Rightarrow dL/dt = \Omega \wedge L \quad (\wedge \text{ est le produit vectoriel )}$$

$$\text{or } dL/dt = \tau = mgd \sin\theta$$

$$L \sin\theta \Omega = mgd \sin\theta$$

$$L \Omega = mgd$$

$\Omega$  étant toujours très inférieur à  $\omega_0$ ,  $L_p$  est très inférieur à  $L_0$

$$L^2 = L_0^2 + L_p^2 + 2 L_0 L_p \cos\theta$$

$$L_0 \gg L_p \text{ donc } L^2 \simeq L_0^2 + 2 L_0 L_p \cos\theta = L_0^2 (1 + 2 L_p/L_0 \cos\theta)$$

$$L_p/L_0 \ll 1 \text{ donc } L \simeq L_0 (1 + L_p/L_0 \cos\theta)$$

$L$  est donc très voisin de  $L_0$  et vaut donc environ  $I\omega_0$ ,  $L \simeq I\omega_0$

$$\text{On a donc } I\omega_0 \Omega = mgd$$

$$\Omega = mgd/(I\omega_0)$$

**Vectoriellement :**  $dL/dt = \tau = \Omega \wedge L = \Omega \wedge L_0$

$$\text{La période de précession est donc } T_p = 2\pi/\Omega = 2\pi I\omega_0/(mgd)$$

La précession est d'autant plus lente que  $I$  et  $\omega_0$  sont grands et que le support est proche du centre de gravité du gyroscope.

### 4. Étude phénoménologique du gyroscope.

La deuxième loi de Newton donne l'explication complète de la précession du gyroscope, mais ne donne peut-être pas l'impression d'expliquer vraiment ce fait étonnant qu'une toupie ne tombe pas comme il semble qu'elle devrait le faire, mais qu'au lieu de cela, le seul fait de précesser lentement autour de l'axe vertical l'empêche de tomber. La raison profonde en est l'existence des forces de Coriolis qui s'appliquent sur chaque particule du gyroscope. Ces forces qui apparaissent dans un repère fixe par rapport à l'axe du gyroscope produisent un couple dont le moment total  $\mathbf{M} = I \omega_0 \Omega \sin\theta_0$  s'oppose exactement à celui du poids ( $\tau$ ) quand le gyroscope précesse à la vitesse angulaire  $\Omega = mgd/(I\omega_0)$ .

Voir l'établissement de l'expression de  $M$  en fin de document.

Pour l'explication du démarrage de la précession, voir le paragraphe 5.1 qui suit.

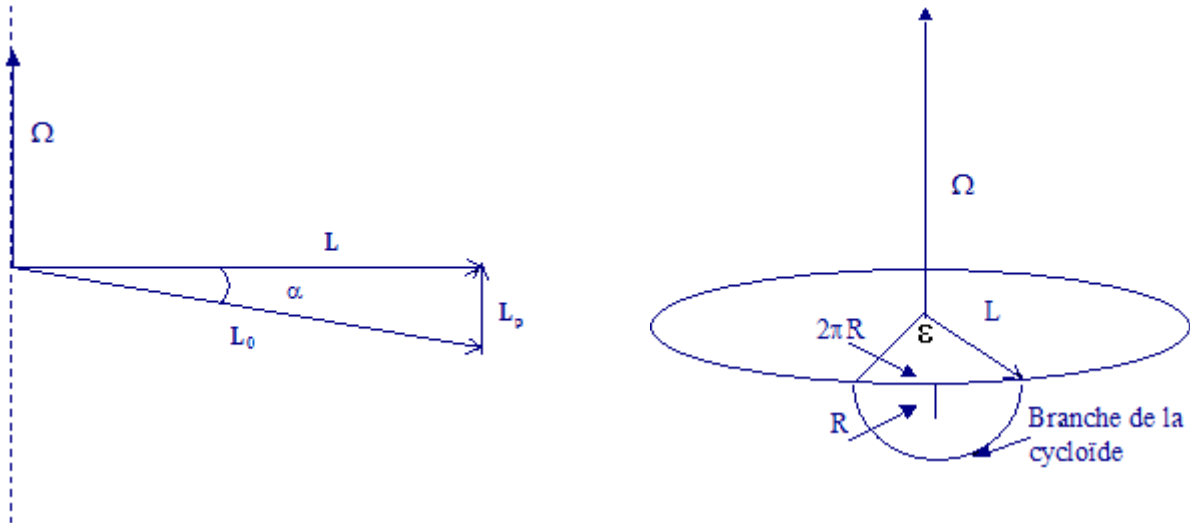
### 5. Nutation.

#### 5.1 Description

Le mouvement de précession du gyroscope à vitesse angulaire  $\Omega$  constante, n'est pas le mouvement le plus général du gyroscope, c'est une solution possible si on le pousse latéralement avec cette vitesse au départ. Cependant, en général on se contente de le lâcher après l'avoir mis en rotation.

Dans ces conditions, le gyroscope commence par tomber, ce mouvement entraîne l'apparition de forces de Coriolis dont le couple fait tourner le gyroscope autour de la verticale, c'est le démarrage de la précession, ce couple incurve la trajectoire. Quand elle atteint la direction horizontale la vitesse angulaire de précession a dépassé  $\Omega$  qui est maintenant la vitesse moyenne de précession, le couple des forces de Coriolis est alors supérieur à  $\tau$ , le gyroscope remonte donc jusqu'à son altitude de départ ( conservation de l'énergie mécanique du gyroscope ) où sa vitesse de précession s'annule, puis le mouvement se répète, on a alors un mouvement en forme de cycloïde ( mouvement d'un point de la circonférence d'une roue de vélo ) appelé nutation.. Ce mouvement est peu visible en général sauf si la vitesse  $\omega_0$  du gyroscope est assez faible, d'autant plus qu'il s'amortit rapidement à cause des frottements.

## 5.2. Étude phénoménologique du gyroscope horizontal



L'étude rigoureuse du gyroscope est un problème assez complexe de mécanique du solide. On peut cependant obtenir les résultats principaux par une étude phénoménologique approchée sachant que le gyroscope horizontal décrit une cycloïde quand on le lâche sans vitesse initiale. L'étude qui suit se limite au cas des petits angles de nutation et aux vitesses de précession faible ( $\alpha$  et  $\varepsilon$  sont très petits donc  $L_p \ll L_0$ ).

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_1$  ( $L_1$  est la composante qui s'ajoute à  $L_p$  à cause de la nutation)

$$L_0 = I \omega_0$$

$$L_p = I_p \Omega$$

$I_p$  : moment d'inertie autour de l'axe vertical.

On étudie le mouvement de l'extrémité du vecteur  $L_0$  que l'on place arbitrairement au centre de gravité du gyroscope et auquel on donne une longueur égale à  $d$ .

Le mouvement étudié est donc celui du centre de gravité du gyroscope lâché sans vitesse initiale.

Sans nutation,  $L_0$  fait un angle  $\alpha$  avec l'horizontale, tel que  $\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_p$  ( $\mathbf{L}_1 = \mathbf{0}$ )

$L_p \ll L_0$  ( $\alpha$  est très petit) et la nutation a un rayon égal à  $L_p$

En une période de nutation  $T_n$ ,  $L_0$  décrit l'arche d'une cycloïde dont la largeur vaut  $2\pi L_p$

L'extrémité de  $L_0$  a donc tourné d'un angle de précession  $\varepsilon = 2\pi L_p/L_0$  en une période  $T_n$ .

Or pendant  $T_n$ , le gyroscope a précessé d'un angle  $\Omega T_n$ . Ainsi

$$\Omega T_n = \varepsilon = 2\pi L_p/L_0 = 2\pi I_p \Omega / (I \omega_0)$$

$$\Omega T_n = 2\pi I_p \Omega / (I \omega_0) \text{ donc } T_n = 2\pi I_p / (I \omega_0)$$

La période de nutation du gyroscope vaut  $T_n = 2\pi I_p / (I \omega_0) = I_p / I T_0$  et  $\omega_n = I / I_p \omega_0$

La nutation est d'autant plus rapide que  $I$  et  $\omega_0$  sont grands et que le support est proche du centre de gravité du gyroscope ( $I_p$  plus petit). Son amplitude angulaire  $\alpha$  est d'autant plus petite que  $\omega_0$  est grande et que le support est proche du centre de gravité.

Pour le lâcher sans vitesse initiale (cycloïde) :

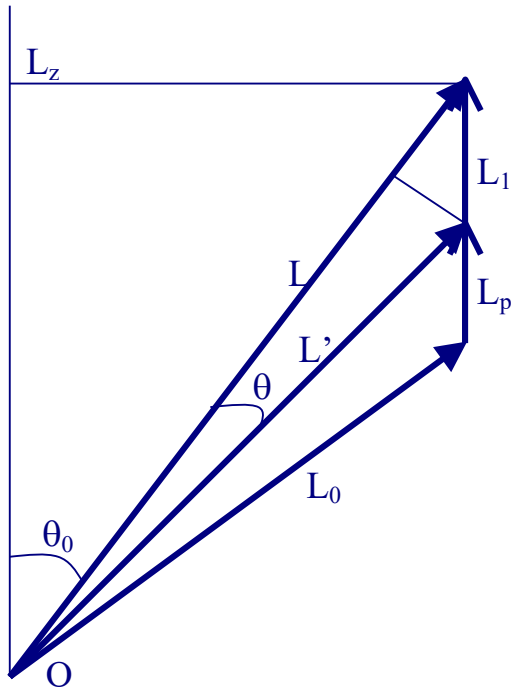
$$\alpha = \varepsilon / 2\pi = L_p / L_0 = I_p \Omega / L_0 = I_p mgd / (I \omega_0)^2$$

$$\alpha = I_p mgd / (I \omega_0)^2 = T_n^2 mgd / (4\pi^2 I_p)$$

L'amplitude maximale de la nutation est alors :  $A_n = d 2\alpha = 2 I_p mgd^2 / (I \omega_0)^2$

### 5.3 Étude complète approchée

#### 5.3.1 Cas général



L'étude qui suit se limite au cas des petits angles de nutation et aux vitesses de précession faible.

$\theta$  petit et  $\mathbf{L}'_p = \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_1 \ll \mathbf{L}_0$   
(Rotation rapide du gyroscope :  $\Omega \ll \omega_0$ )

$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}'_p \simeq \mathbf{L}_0$  donc  $L \simeq I\omega_0$

$\theta$  petit donc  $L \sin \theta \simeq L' \theta = L_0 \theta$  donc

$L_1 = L_0 \theta / \sin \theta_0$

et  $\theta_0 + \theta = \theta_0$

Si  $\theta_0 = 0$ ,  $\theta = 0$  donc  $L_1$  reste fini, il tend vers 0

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}'_p = \mathbf{L}_0 + \mathbf{L}_p + \mathbf{L}_1 \quad (\mathbf{L}'_p \ll \mathbf{L}_0)$$

$$L_0 = I \omega_0$$

$\Omega = mgd / (I\omega_0)$  On pose  $\omega_f$  la composante de la vitesse de rotation due à la nutation

$L'_p = I_p (\Omega + \omega_f)$   $I_p = I_x \sin^2 \theta_0 + I \cos^2 \theta_0$  ( $\theta$  petit donc  $\theta_0$  pratiquement constant et donc  $I_p$  fixe)

$I_x$  : moment d'inertie autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de rotation passant par le point de contact avec le support

On étudie le mouvement du gyroscope dans un repère tournant à la vitesse angulaire  $\Omega$ .

Ce repère n'est pas galiléen, il faut donc ajouter les pseudo-forces centrifuge et de Coriolis. On appelle leur moment  $M_f$  (comme  $\omega_0 \gg \Omega$ , le moment de la force centrifuge est négligeable devant celui de la force de Coriolis (leur rapport est voisin de  $\omega_0 / \Omega$ ) donc  $M_f \simeq M_{\text{coriolis}}$ )

On appelle  $\omega_\theta$  la vitesse angulaire relative du gyroscope par rapport à O et  $\omega_\phi$  la vitesse angulaire relative du gyroscope par rapport à l'axe  $O_z$ .

La 2<sup>ème</sup> loi de Newton est alors :  $\mathbf{I}_x d\omega_\theta / dt = mg d \sin \theta_0 + \mathbf{M}_f$

En absence de nutation le gyroscope est immobile dans le repère tournant donc :

$$mgd \sin \theta_0 + M_f = 0$$

$$M_f = - mgd \sin \theta_0 = - I\omega_0 \Omega \sin \theta_0$$

En présence de nutation, la vitesse angulaire est  $\Omega_t = \Omega + \omega_\phi$ , ce qui donne

$$M_f = - I\omega_0 \Omega_t \sin \theta_0$$

(Pour ceux qui ne seraient pas convaincus par ce raisonnement, on peut intégrer le moment de la force de Coriolis ( $f_c = 2 m_i \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{\Omega}_t$ ) sur le gyroscope, on trouve bien\* :

$M_{\text{coriolis}} = - I\omega_0 \Omega_t \sin \theta_0$ . Comme on néglige  $M_{\text{centrifuge}}$ , on a bien  $M_f = - I\omega_0 \Omega_t \sin \theta_0$

$$M_f = - I\omega_0 \Omega_t \sin \theta_0 = - I\omega_0 \Omega \sin \theta_0 - I\omega_0 \omega_\phi \sin \theta_0 = - mgd \sin \theta_0 - I\omega_0 \omega_\phi \sin \theta_0.$$

On reporte dans la loi de Newton :

$$I_x d\omega_\theta / dt = mgd \sin \theta_0 - mgd \sin \theta_0 - I\omega_0 \omega_\phi \sin \theta_0 = - I\omega_0 \omega_\phi \sin \theta_0$$

$$\mathbf{I}_x d\omega_\theta / dt = - I\omega_0 \sin \theta_0 \omega_\phi \quad (1)$$

\* Voir l'établissement de l'expression de  $M_{\text{coriolis}}$  en fin de document.

D'autre part,  $L_1 = I_p \omega_f$  et  $L_1 = L_0 \theta / \sin \theta_0 = I \omega_0 \theta / \sin \theta_0$  donc

$$\omega_\phi = I \omega_0 \theta / \sin \theta_0 / I_p$$

On dérive cette expression :  $d\omega_\phi/dt = I \omega_0 / \sin \theta_0 / I_p d\theta/dt = I \omega_0 / \sin \theta_0 / I_p \omega_\theta$  ( 2 )

$$\omega_\theta = I_p \sin \theta_0 / (I \omega_0) d\omega_\phi/dt \text{ donc } d\omega_\theta/dt = I_p \sin \theta_0 / (I \omega_0) d^2\omega_\phi/dt^2$$

or ( 1 ) donne  $I_x I_p \sin \theta_0 / (I \omega_0) d^2\omega_\phi/dt^2 = - I \omega_0 \sin \theta_0 \omega_\phi$  donc en posant  $I_n^2 = I_x I_p$

$$d^2\omega_\phi/dt^2 + I^2 \omega_0^2 / I_n^2 \omega_\phi = 0 \quad ( 3 )$$

**Solution :**

La solution de ( 3 ) est sinusoïdale :  $\omega_\phi = C \cos ( \omega_n t + \Phi )$  avec  $\omega_n = I \omega_0 / I_n$

( 2 ) donne :

$$\omega_\theta = I_p \sin \theta_0 / (I \omega_0) d\omega_\phi/dt = - C I_p \sin \theta_0 / (I \omega_0) \omega_n \sin ( \omega_n t + \Phi ) = - C I_p \sin \theta_0 / I_n \sin ( \omega_n t + \Phi )$$

$$\omega_\theta = - C I_p \sin \theta_0 / I_n \sin ( \omega_n t + \Phi )$$

**période de la nutation :**

On cherche maintenant les coordonnées  $v_\theta$  et  $v_\phi$  de la vitesse relative du centre de gravité du gyroscope.

$$v_\theta = d \omega_\theta = - C I_p / I_n d \sin \theta_0 \sin ( \omega_n t + \Phi )$$

$$v_\phi = d \sin \theta_0 \omega_\phi = C d \sin \theta_0 \cos ( \omega_n t + \Phi )$$

A  $t = 0$ , le gyroscope est immobile donc  $v = d \sin \theta_0 \Omega + v_{\phi \max} = 0$  et ainsi

$$v_{\phi \max} = - d \sin \theta_0 \Omega = C d \sin \theta_0 \text{ donc } C = - \Omega \text{ et } \Phi = 0$$

$$v_\theta = \Omega I_p / I_n d \sin \theta_0 \sin \omega_n t$$

$$v_\phi = - \Omega d \sin \theta_0 \cos \omega_n t$$

Cela correspond à un mouvement elliptique en sens inverse des aiguilles d'une montre ( pour une précession directe ) décrit en un temps :

$$T_n = 2\pi / \omega_n = 2\pi I_n / (I \omega_0) = I_n / I T_0 \text{ ou } \omega_n = I / I_n \omega_0$$

Les deux axes de l'ellipse sont :

$$\text{Axe "vertical" : } \mathbf{b} = \Omega I_p / I_n d \sin \theta_0 / \omega_n = mgd^2 I_p \sin \theta_0 / (I \omega_0)^2$$

$$\text{Axe horizontal : } \mathbf{a} = \Omega d \sin \theta_0 / \omega_n = mgd^2 I_n \sin \theta_0 / (I \omega_0)^2$$

$$a/b = I_n / I_p = (I_x / I_p)^{1/2} \text{ A la verticale } \theta_0 = 0 \text{ donc on n'a plus de nutation,}$$

**L'amplitude de nutation vaut alors  $a_n = 2 b = 2 mgd^2 I_p \sin \theta_0 / (I \omega_0)^2$**

### 5.3.2 Cas du gyroscope horizontal

Pour un gyroscope horizontal,  $I_p = I_x = I_n$  et  $\theta_0 = \pi/2$  donc

$$v_\theta = \Omega d \sin \omega_n t$$

$$v_\phi = - \Omega d \cos \omega_n t$$

On a alors un mouvement circulaire uniforme en sens inverse des aiguilles d'une montre ( pour une rotation directe du gyroscope ) de vitesse relative  $v_r = \Omega d$ .

$\Omega d$  étant aussi la vitesse de précession du centre du cercle, cela correspond à un mouvement de roulement sans glissement, c'est à dire à une cycloïde décrite en

$$T_n = 2\pi / \omega_n = 2\pi I_p / (I \omega_0)$$

$$T_n = 2\pi I_p / (I \omega_0) = I_p / I T_0 \text{ ou } \omega_n = I / I_p \omega_0$$

**Amplitude maximale de la nutation :**

Le cercle de rayon  $R$  est décrit à vitesse constante  $v_r$  en  $T_n$  donc  $2\pi R = v_r T_n$

$$\mathbf{R} = \Omega d I_p / (I \omega_0) = mgd^2 I_p / (I \omega_0)^2$$

**L'amplitude de nutation  $A_n = 2R = 2mgd^2 I_p / (I \omega_0)^2$**  On retrouve le résultat du 5.2

**Exemple :** Gyroscope horizontal constitué d'un disque fin de rayon  $R = 5$  cm tournant à 3000 tours/min (  $N_0 = 50$  Hz et  $\omega_0 = 100\pi$  rd/s ) dont l'axe est posé sur un support distant de  $d = R$  de son centre.

$$\text{On a alors } I = mR^2/2 \text{ et } I_p = mR^2/4 + md^2 = 5 mR^2/4 \quad ( I_p = 2,5 I )$$

$$T_p = 2\pi I \omega_0 / mgd = \pi R \omega_0 / g = 5 \text{ s}$$

$$T_n = I_p / I T_0 = 2,5 T_0 \quad ( N_n = N_0 / 2,5 = 20 \text{ Hz} )$$

$$\alpha = T_n^2 mgd / (4\pi^2 I_p) = 5 T_0^2 g / (4\pi^2 R) = 5 \text{ g} / (R \omega_0^2) = 10^{-2} \text{ rd} = 0,6^\circ \quad A_n = 1 \text{ mm}$$

Cela donne une oscillation de nutation de 1 mm d'amplitude effectuée 20 fois par seconde. C'est difficile à voir! D'autant plus que ça s'amortit rapidement. On voit essentiellement une précession régulière de 5 s de période.

Le gyroscope effectue sa précession 0,5 mm sous l'horizontale, ce qui ne se remarque guère et donne l'impression que le gyroscope reste à l'horizontale pendant sa précession. C'est pourtant cette petite inclinaison qui génère le mouvement de précession.

**Remarque :** Si on lance le gyroscope avec une vitesse horizontale  $V_0$ , on obtient :

$$v_\theta = (\Omega d - V_0) \sin \omega_n t$$

$$v_\varphi = (V_0 - \Omega d) \cos \omega_n t$$

Si  $V_0 > 0$ , le mouvement de nutation est une trochoïde raccourcie ( Mouvement d'un point du rayon d'une roue de vélo ).

Si  $V_0 \approx \Omega d$ , l'amplitude est très faible, le mouvement de nutation est assimilable à une sinusoïde ( limite d'une trochoïde raccourcie )

Si  $V_0 = \Omega d$ , il n'y a plus de nutation.

Si  $V_0 < 0$ , le mouvement de nutation est une trochoïde allongée (trochoïde "bouclée").

## 6. précession des équinoxes

### 6.1 Moment de la force gravitationnelle sur une masse elliptique

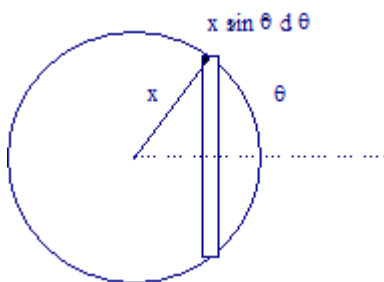
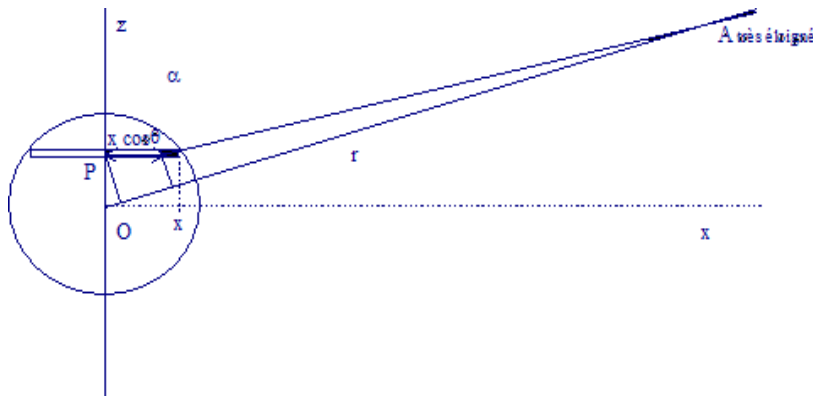


schéma de la tranche centrée sur P

$$dS = 2 x \sin \theta \ x \sin \theta \ d\theta$$

En A se trouve le centre de l'astre attracteur de masse m ( Lune ou Soleil ) placé sur l'écliptique

O centre de gravité de la Terre

$$r = OA$$

$\alpha$  angle d'inclinaison de la Terre :  $23,5^\circ$  ( A étant très éloigné, tous les rayons vers A font pratiquement le même angle  $\alpha$  par rapport à l'axe  $O_z$  )

$\omega_T$  vitesse angulaire de la Terre

$\mu$  masse volumique moyenne de la Terre

a rayon équatorial de la Terre et b rayon polaire de la Terre

La Terre est sensiblement une ellipse ( ou plus exactement un ellipsoïde de révolution autour de son axe des pôles.... ).

On commence par déterminer le moment par rapport à O exercé sur le disque de centre P, d'épaisseur dz, par la masse  $m_A$  placée en A très éloigné.

Pour cela, on intègre  $dM = F_x z - F_z x \cos\theta$

$$F = G m_A \mu dS dz / (r - z \cos\alpha - x \cos\theta \sin\alpha)^2$$

$$F_x = F \sin\alpha \quad F_z = F \cos\alpha$$

$$dS = 2 x \sin\theta \times \sin\theta d\theta$$

$$d^2M = 2 G m_A \mu x^2 \sin^2\theta (z \sin\alpha - x \cos\theta \cos\alpha) d\theta dz / (r - z \cos\alpha - x \cos\theta \sin\alpha)^2$$

On fait un développement limité au 1<sup>er</sup> ordre de  $1/(r - z \cos\alpha - x \cos\theta \sin\alpha)^2$ , on obtient :

$$d^2M = 2 G m_A \mu / r^2 x^2 \sin^2\theta (z \sin\alpha - x \cos\theta \cos\alpha) (1 + 2 z/r \cos\alpha + 2 x/r \cos\theta \sin\alpha) d\theta dz$$

L'intégrale sur  $\theta$  de 0 à  $\pi$  donne :

$$dM = 2 G m_A \mu / r^2 x^2 (z \sin\alpha (1 + 2 z/r \cos\alpha) \pi/2 - 2 x^2/r \cos\alpha \sin\alpha \pi/8) dz$$

Pour une ellipse on a  $x^2 = a^2 (1 - z^2/b^2)$

$$dM = 2 G m_A \mu (a^2 (1 - z^2/b^2) (z \sin\alpha (1 + 2 z/r \cos\alpha) \pi/2) / r^2 - 2 a^4 (1 - z^2/b^2)^2 / r^3 \cos\alpha \sin\alpha \pi/8) dz$$

On obtient le moment total en intégrant dM de -b à +b :

$$M = \pi G m_A \mu \cos\alpha \sin\alpha (8a^2 b^3 / 15r - 8a^4 b / 15r) / r^2 = 8/15 \pi a^2 b G m_A \mu (b^2 - a^2) \cos\alpha \sin\alpha / r^3$$

La masse de la Terre  $m_T = 4/3 \pi a^2 b \mu$  donc

$$M = 2/5 G m_T m_A (b^2 - a^2) \cos\alpha \sin\alpha / r^3$$

Ce moment est le moment maximal. A angle droit, le moment est nul. De plus la Lune n'est pas tout à fait sur l'écliptique et se décale par rapport au Soleil. Tout cela fait qu'il faut réduire la valeur de M. L'expérience montre que tout va bien si on prend 3/4 de la valeur maximale.

$$M_{\text{moy}} = 3/10 G m_T m_A / r^3 (b^2 - a^2) \sin\alpha \cos\alpha$$

La Terre subit l'action de la Lune et du Soleil donc

$$M_{\text{moy}} = 3/10 G m_T m_L / r_L^3 (b^2 - a^2) \sin\alpha \cos\alpha + 3/10 G m_T m_S / r_S^3 (b^2 - a^2) \sin\alpha \cos\alpha$$

$$M_{\text{moy}} = 3/10 G m_T (m_L / r_L^3 + m_S / r_S^3) (b^2 - a^2) \sin\alpha \cos\alpha$$

$$M_{\text{moy}} = - 3/10 G m_T (m_L / r_L^3 + m_S / r_S^3) (a^2 - b^2) \sin\alpha \cos\alpha$$

Le moment d'inertie par rapport à son axe de rotation d'un ellipsoïde de révolution

homogène de diamètre a vaut  $I_z = 2/5 m_T a^2$  et par rapport à un axe perpendiculaire, il vaut

$$I_x = 1/5 m_T (a^2 + b^2). \text{ Ainsi, } I_z - I_x = 1/5 m_T (a^2 - b^2) \text{ et } m_T (a^2 - b^2) = 5 (I_z - I_x)$$

$$\text{On a ainsi : } M_{\text{moy}} = - 3/2 G (m_L / r_L^3 + m_S / r_S^3) (I_z - I_x) \sin\alpha \cos\alpha$$

## 6.2 Vitesse angulaire de précession $\Omega$

La loi de Newton donne : ( cf 3. )

$$L \sin\alpha \Omega = M_{\text{moy}}$$

$$L \Omega = M / \sin\alpha$$

$$L = I_z \omega_T$$

$$\Omega = M_{\text{moy}} / (I_z \omega_T \sin\alpha) = - 3/2 G (m_L / r_L^3 + m_S / r_S^3) (I_z - I_x) \cos\alpha / (I_z \omega_T) \quad (\Omega < 0 \text{ signifie que la précession se fait dans le sens inverse de la rotation de la Terre})$$

La période de précession de la Terre est donc

$$T_p = 2\pi / \Omega = 8\pi^2 / (3 T_T \cos\alpha G (m_L / r_L^3 + m_S / r_S^3) (I_z - I_x) / I_z)$$

$$A.N : T_T = 86160 \text{ s, } G(m_L / r_L^3 + m_S / r_S^3) = 1,27 \cdot 10^{-13} \text{ s}^{-2}, \quad \alpha = 23,5^\circ$$

$$(I_z - I_x) / I_z = (a^2 - b^2) / (2a^2) = (a - b)(a + b) / (2a^2) = 1/300 (a - b) = 21,5 \text{ km et}$$

$$(a + b) / 2 = 6370 \text{ km}$$

$$T_p = 25800 \text{ ans}$$

**Remarque :** La Terre n'est pas homogène, elle est plus dense au centre qu'à la périphérie. Ceci modifie le moment  $M_{\text{moy}}$  et les moments d'inertie  $I_z$  et  $I_x$ , mais un calcul précis montre qu'ils sont tous multipliés par le même coefficient  $k$  qui dépend du modèle de Terre choisi ( $k \approx 3/4$ ). Donc

$$M_{\text{moy}} = -3k/10 G m_T (m_L/r_L^3 + m_S/r_S^3) (a^2 - b^2) \sin\alpha \cos\alpha$$

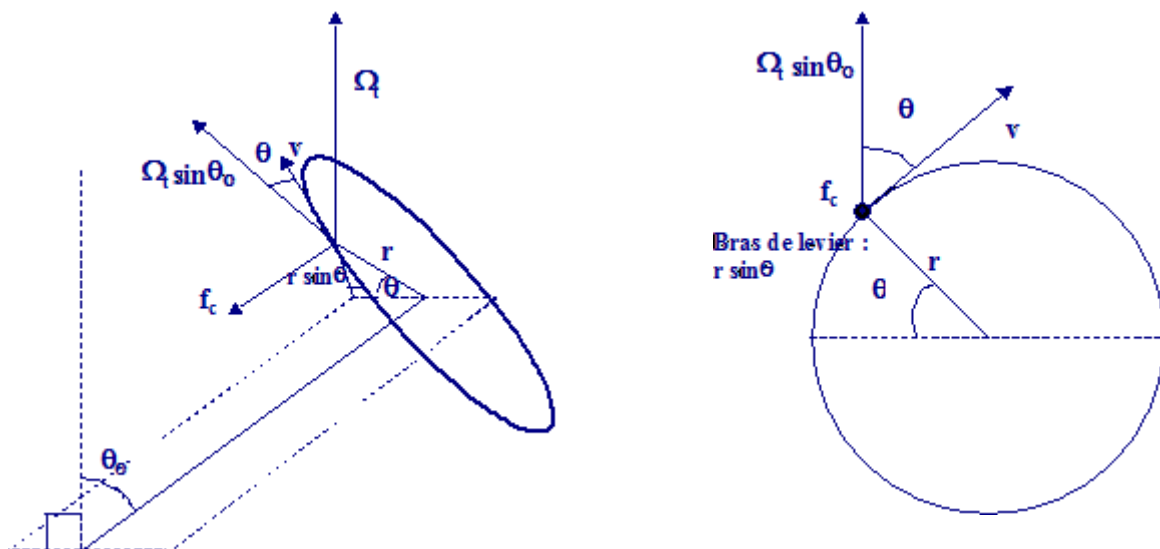
$$I_z = 2k/5 m_T a^2 \text{ et } I_x = k/5 m_T (a^2 + b^2) \text{ donc } m_T (a^2 - b^2) = 5/k (I_z - I_x).$$

On a donc encore  $M_{\text{moy}} = -3/2 G (m_L/r_L^3 + m_S/r_S^3) (I_z - I_x) \sin\alpha \cos\alpha$

## 7. Compas gyroscopique

Un compas gyroscopique est un gyroscope fixe sur un support à cardans et parfaitement équilibré de manière que son centre de gravité soit exactement sur son axe de rotation. Le bras de levier étant nul, le moment des forces de gravitation ou d'inertie est nul et donc le vecteur  $L$  est constant et l'axe du gyroscope garde une direction fixe dans l'univers. Cet axe peut donc servir de référence absolue au cours des voyages interplanétaires.

### Calcul du moment des forces de Coriolis sur un gyroscope



La force de Coriolis n'ayant pas le même sens au dessus de l'axe et en dessous, le moment total de la force de Coriolis sur le cerceau est le double du moment de la force de Coriolis sur un demi-cerceau.

On commence par chercher le moment de  $f_c$  sur un 1/2 cerceau de largeur  $dr$ , d'épaisseur  $dz$  et de rayon  $r$ . On intègre sur  $\theta$  allant de  $0$  à  $\pi$ .

$$dm = \rho dr dz r d\theta \quad v = r \omega_0 \quad \Omega_t = r \omega_0 \Omega_t \sin\theta_0 \sin\theta \quad \theta_0 \text{ angle entre l'axe du gyroscope et } \Omega_t$$

$$df_c = 2 dm v \wedge \Omega_t = 2 \rho dr dz r d\theta r \omega_0 \Omega \sin\theta_0 \sin\theta$$

Le bras de levier de  $df_c$  est  $r \sin\theta$

$$d^3M = df_c r \sin\theta = 2 \rho dr dz r d\theta r \omega_0 \Omega \sin\theta_0 \sin\theta r \sin\theta = 2 \rho dr dz r^3 \omega_0 \Omega \sin\theta_0 \sin^2\theta d\theta$$

L'intégrale de  $\sin^2\theta d\theta$  entre  $0$  et  $\pi$  vaut  $\pi/2$  donc

$$d^2M = \pi \rho dr dz r^3 \omega_0 \Omega \sin\theta_0 \quad \text{Pour le cerceau entier il faut doubler cette valeur donc}$$

$$d^2M = 2 \pi \rho dz \omega_0 \Omega \sin\theta_0 r^3 dr$$



Maintenant on cherche le moment exercé sur un disque d'épaisseur  $dz$ , c'est l'intégrale de  $d^2M$  sur  $r$  entre 0 et  $R$ , l'intégrale de  $r^3 dr$  vaut  $R^4/4$  donc

$$dM = 1/2 \pi \rho \omega_0 \Omega_t \sin\theta_0 R^4 dz \quad (\pi R^2 dz \text{ est le volume du cylindre donc } \rho \pi R^2 dz \text{ est sa masse } dm_c)$$

$$dM = 1/2 dm_c \omega_0 \Omega_t \sin\theta_0 R^2 \quad (\text{Pour un cylindre, le moment d'inertie par rapport à son axe est } dI = dm_c R^2/2) \text{ donc}$$

$$dM = dI \omega_0 \Omega_t \sin\theta_0$$

Un solide de révolution est assimilable à un empilement de disques donc le moment total  $M$  est la somme des  $dM$ , les moments d'inertie s'ajoutent donc la somme des  $dI$  donne  $I$ , le moment d'inertie total du gyroscope par rapport à son axe )

$$\mathbf{M} = \mathbf{I} \omega_0 \Omega_t \sin\theta_0$$