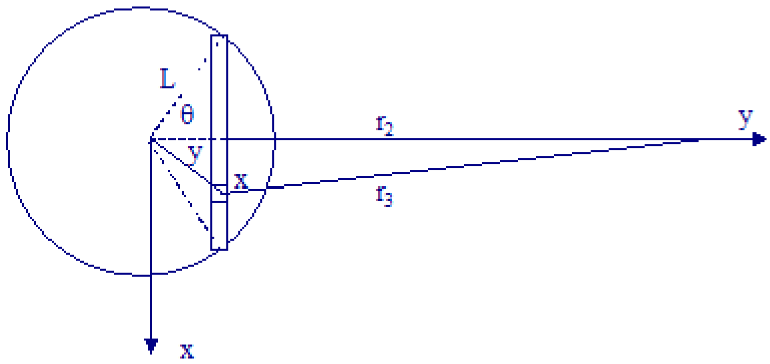
Précession des satellites

par Gilbert Gastebois

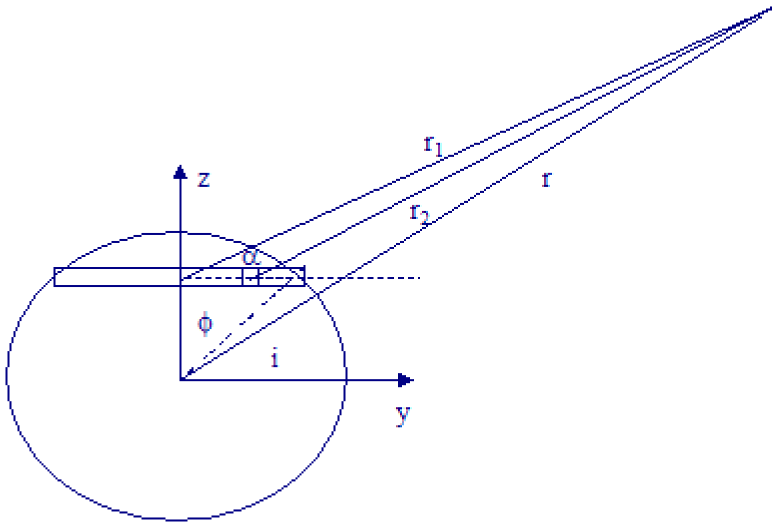
Les lois de Kepler sont valables pour des astres sphériques, mais les astres étant en rotation ne sont pas strictement sphériques, ils sont aplatis aux pôles et leur forme est celle d'un ellipsoïde de révolution. Dans ces conditions les lois de Kepler ne sont qu'approximatives. En général, le périgée se déplace sur son orbite (avance du périgée) et le plan de l'orbite tourne par rapport aux étoiles (précession de l'orbite). Cette précession de l'orbite permet de lancer des satellites héliosynchrones.

I . Potentiel de gravitation d'un ellipsoïde de révolution

1. Schémas et rappels mathématiques



Parallélépipède de côtés $L\sin\theta$, dy et dz dans un disque d'épaisseur dz et de rayon L



Disque de rayon L d'épaisseur dz dans un ellipsoïde de révolution de grand axe R_e et de petit R_p et de masse volumique ρ

Intégrales de 0 à π des fonctions suivantes :

$\sin^n x \cos x$--> 0 $\sin^2 x$ --> π/2 $\sin^3 x$ --> 4/3 $\sin^4 x$ --> 3π/8

$\sin^5 x$ --> 16/15 $\sin^2 x \cos^2 x$--> π/8 $\sin^3 x \cos^2 x$--> 4/15

Les calculs seront faits par développement limités au $2^{ème}$ ordre. Les ordres impairs

n'intervenant pas, les calculs seront valables quand R^4/r^4 sera négligeable (r> 2 R environ)
Au 2ème ordre, $(1 + x)^{-½} = 1 - x/2 + 3/8\, x^2$

Équations de la section de l'ellipsoïde :
$y = R_e \sin \varphi$
$z = R_p \cos \varphi$

2. Expression du potentiel gravitationnel V à la distance r du centre de l'ellipsoïde

2.1 Potentiel d'un parallélépipède homogène infinitésimal de longueur d = Lsinθ

Le potentiel d'une masse infinitésimale ρ dx dy dz à la distance r_3 est $d^3V = - G\rho\, dx\, dy\, dz/r_3$ (Loi de Newton)
$r_3^2 = r_2^2 + x^2$ Au 2ème ordre, $1/r_3 = 1/r_2 (1 - x^2/2r_2^2)$
$d^3V = - G \rho\, dx\, dy\, dz/r_2 (1 - x^2/2r_2^2)$
On intègre x de - Lsinθ à + Lsinθ, on obtient $d^2V = - G\rho\, dy\, dz/r_2 (2L\sin\theta - L^3\sin^3\theta /3r_2^2)$
$y = L\cos\theta$ donc $dy = -L \sin\theta\, d\theta$ donc
$\mathbf{d^2V = G\rho\, dz/r_2 (2L^2\sin^2\theta - L^4\sin^4\theta /3r_2^2)\, d\theta}$

2.2 Potentiel d'un disque homogène infinitésimal de rayon L

$d^2V = G \rho\, dz/r_2 (2L^2\sin^2\theta - L^4\sin^4\theta /3r_2^2)\, d\theta$
$r_2^2 = (r_1 - y\cos\alpha)^2 + y^2\sin^2\alpha = r_1^2 - 2y\, r_1 \cos\alpha + y^2$
Au 2ème ordre, $1/r_2 = 1/r_1 (1 + y/r_1 \cos\alpha - y^2/2r_1^2 + 3\, y^2\cos^2\alpha /2r_1^2)$
$y = L\cos\theta$ donc au 2ème ordre
$d^2V = G \rho L^2 dz/r_1 (2\sin^2\theta - L^2\sin^4\theta /3r_1^2 + 2L\sin^2\theta \cos\theta \cos\alpha/r_1 - L^2\sin^2\theta \cos^2\theta/r_1^2$
$+ 3L^2\sin^2\theta \cos^2\theta \cos^2\alpha/r_1^2)\, d\theta$
On intègre θ de 0 à π :
$dV = G \rho L^2 dz/r_1 (\pi - \pi L^2/8r_1^2 + 0 - \pi L^2/8r_1^2 + 3\pi L^2\cos^2\alpha/8r_1^2)$
$dV = \pi G \rho L^2 dz/r_1 (1 - L^2/4r_1^2 + 3L^2\cos^2\alpha/8r_1^2)$
$\mathbf{dV = \pi G \rho L^2 /r_1 (1 - L^2/4r_1^2 + 3 L^2\cos^2\alpha/8r_1^2)\, dz}$

2.3 Potentiel de l'ellipsoïde homogène

$dV = \pi G \rho L^2 /r_1 (1 - L^2/4r_1^2 + 3 L^2\cos^2\alpha/8r_1^2)\, dz$
$r_1^2 = (r - z\sin i)^2 + z^2\cos^2 i = r^2 - 2z\, r \sin i + z^2$
Au 2ème ordre, $1/r_1 = 1/r (1 + z \sin i /r - z^2/2r^2 + 3\, z^2\sin^2 i /2r^2)$ et $\cos^2\alpha/r_1^2 = \cos^2 i/r^2$
Au 2ème ordre, $dV = \pi G\rho L^2/r (1-L^2/4r^2 + 3\, L^2\cos^2 i/8r^2 + z\sin i /r - z^2/2r^2+ 3\, z^2\sin^2 i/2r^2)\, dz$
$L = R_e \sin \varphi$ et $z = R_p \cos \varphi$ donc $dz = - R_p \sin \varphi\, d\varphi$

$dV = \pi G \rho R_e^2 R_p/r (\sin^3\varphi - R_e^2\sin^5\varphi/4r^2 + 3R_e^2 \sin^5\varphi \cos^2 i/8r^2 + R_p \cos\varphi \sin^3\varphi \sin i /r - R_p^2\cos^2\varphi \sin^3\varphi/2r^2 + 3 R_p^2\cos^2\varphi \sin^3\varphi \sin^2 i /2r^2) d\varphi$

On intègre dV de $\varphi = 0$ à $\varphi = \pi$

$V = - \pi G \rho R_e^2 R_p/r (4/3 - 4R_e^2/15r^2 + 6R_e^2 \cos^2 i/15r^2 + 0 - 2R_p^2/15r^2 + 6 R_p^2 \sin^2 i/15r^2)$

En remplaçant $\cos^2 i$ par $1 - \sin^2 i$, on obtient :

$V = - 4/3\pi R_e^2 R_p \rho G/r (1 + (R_e^2 - R_p^2)(1 - 3\sin^2 i)/10r^2)$ $4/3 \pi R_e^2 R_p \rho$ est la masse M de l'ellipsoïde, donc

$V = - GM/r (1 + J_2/2 (1 - 3\sin^2 i)R_e^2 /r^2)$ en posant $J_2 = (R_e^2 - R_p^2)/5R_e^2$

($J_2 = 2/5 (R_e - R_p)/R_e$ si $R_e - R_p << R_e$ ce qui est toujours le cas)

$(R_e - R_p)/ R_e$ est appelé l'aplatissement relatif α de l'ellipsoïde $J_2 = 2\alpha/5$

$$\mathbf{V = - GM/r (1 + J_2/2 (1 - 3\sin^2 i) R_e^2 /r^2) = - GM/r (1 + J_2(3/2 \cos^2 i - 1) R_e^2 /r^2)}$$

Remarque : J_2 étant très petit, le second terme est donc une simple perturbation du potentiel sphérique, ce qui fait que l'expression reste valable pour toutes les valeurs de r, bien qu'elle ait été établie pour $r >> R_e$

2.4 Potentiel d'un astre

L'expression précédente est valable pour un ellipsoïde homogène, mais les astres ne sont pas homogènes, leur densité est plus forte au centre et il sont souvent constitués de plusieurs couches de compositions différentes. L'expression précédente reste valable mais la valeur de J_2 n'est pas exactement de $2\alpha/5$. Que vaut-elle ? Eh, bien ça dépend de la répartition des masses à l'intérieur de l'astre, ce qui est bien compliqué quand c'est même parfaitement connu !

Cependant, on sait que l'aplatissement de l'astre est dû à sa rotation, il y a donc un lien entre les deux. La surface de l'astre s'ajuste pour qu'elle soit une équipotentielle, ce qui veut dire que le potentiel total (intégrant la rotation) à l'équateur doit être le même que le potentiel aux pôles.

A l'équateur il y a l'"accélération centrifuge" $a = \omega^2 r = - dV_{ce}/dr$ donc $V_{ce} = - \omega^2 r^2/2$

(ω : vitesse angulaire de rotation de l'astre)

Donc $V_{equateur} + V_{ce} = V_{polaire} = - GM/R_e (1 + J_2/2) - \omega^2 R_e^2/2 = - GM/R_p (1 - J_2)$

Equateur : $i = 0$ Pôle : $i = \pi/2$

$GM/R_p - GM/R_e - \omega^2 R_e^2/2 = 3/2 J_2 GM/R_p$ ou $J_2 = 2 \alpha/3 - \omega^2 R_e^3/3GM$ en prenant $\alpha << 1$

$$\mathbf{V = - GM/r (1 + J_2/2(1 - 3\sin^2 i) R_e^2/r^2) = - GM/r (1 + J_2(3/2 \cos^2 i - 1) R_e^2/r^2)}$$

$\mathbf{J_2 = 2 \alpha/3 - \omega^2 R_e^3/3GM}$ ($\alpha = (R_e - R_p)/ R_e$) Pour la Terre $J_2 = 1,0826.10^{-3}$

2. Précession sur son orbite du périgée d'un satellite orbitant au voisinage du plan équatorial de son astre

C'est le cas des planètes du système solaire ou des satellites géostationnaires.

Le potentiel gravitationnel est $V = - GM/r\ (1 + J_2R_e^2/2r^2)$

L'accélération $a = -dV/dr = - GM/r^2 - 3/2\ GM\ J_2R_e^2/r^4$

d'où $d^2\mathbf{OM}/dt^2 = (- GM/r^2 - 3/2\ GM\ J_2R_e^2/r^4)\ \mathbf{i}$

En suivant le même raisonnement que pour le calcul képlérien et en posant $u = 1/r$ on obtient :

$d^2u/d\theta^2 + u = GM/K^2 + 3/2\ GM\ J_2R_e^2/K^2\ u^2$

(K est une constante qui représente L/m L est le moment cinétique)

On pose $A = GM/K^2$ et $B = 3/2\ GM\ J_2/K^2 = 3/2\ J_2\ A \ll A$

$d^2u/d\theta^2 + u = A + BR_e^2 u^2$

On prend une solution du type $u = U_0(1 + e\cos(k\theta))$

$- e U_0 k^2 \cos(k\theta) + U_0 + e U_0 \cos(k\theta) = A + BR_e^2 U_0^2 + 2 e BR_e^2 U_0^2 \cos(k\theta)$

On néglige les termes en $B^2R_e^4 U_0^4$

$U_0 = A + BR_e^2 U_0^2$ et $- k^2 + 1 = 2 U_0BR_e^2$

$U_0 = 1 - (1 - 4 ABR_e^2)^{½}/2BR_e^2 = A = GM/K^2$

$k = (1 - 2 U_0BR_e^2)^{½} = 1 - ABR_e^2 = 1 - 3/2\ G^2M^2 J_2R_e^2/K^4$

On pose $\varepsilon = 3/2\ G^2M^2 J_2R_e^2/K^4$

$r = K^2/GM\ \ 1/(1 + e\cos((1 - \varepsilon)\theta)$ $\varepsilon = 3/2\ G^2M^2 J_2R_e^2/K^4$

$r_{max} = K^2/GM\ \ 1/(1 - e)$ $r_{min} = K^2/GM\ \ 1/(1 + e)$ $a = (r_{max} + r_{min})/2$

$r_{max} = K^2/GM\ \ 1/(1 - e^2)$ $K^2/GM = a(1 - e^2)$

$\mathbf{r = a(1 - e^2)/(1 + e\cos((1 - \varepsilon)\theta)}$ a est le demi grand axe de la pseudo ellipse et e son excentricité. $\varepsilon = 3J_2R_e^2/(2a^2 (1 - e^2)^2)$

On retrouve la même valeur de r quand $(1 - \varepsilon)\theta = 2\pi$ donc

$\theta = 2\pi/(1 - \varepsilon) = 2\pi(1 + \varepsilon)$

A chaque période T le satellite a tourné de $(1 + \varepsilon)$ tour, donc l'ellipse a précessé d'un angle de $2\pi\varepsilon$. La période de précession T_p est donc

$$\mathbf{T_p = T/\varepsilon = 2/3\ a^2T (1 - e^2)^2/(J_2R_e^2)}$$

$$\mathbf{ou\ \ \Omega_p = 3/2\ J_2R_e^2\ \omega/(a^2 (1 - e^2)^2)}$$

Remarque : Si le satellite est incliné de i par rapport à l'équateur, l'expression de la dérive du périgée devient :

$\mathbf{T_p = 4/3\ a^2 T (1 - e^2)^2/(J_2R_e^2(5\cos^2 i -1))}$ (Cette période est appelée période anomalistique)

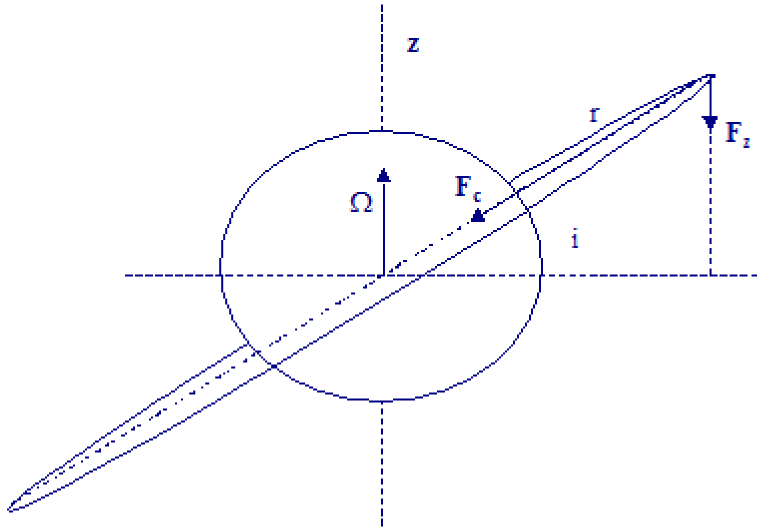
Si $\cos^2 i = 1/5$ (i = 64,3°), le satellite ne précesse plus sur son orbite et son grand axe garde un angle constant par rapport à l'équateur. Cette caractéristique est utilisée par les satellites dits de Molniya qui permettent l'observation à haute altitude des régions de haute latitude.

Remarque : Si on fait i = 0, on obtient $T_p = 1/3a^2\ T (1 - e^2)^2/(J_2R_e^2)$, ce qui n'est que la moitié de l'expression trouvée au dessus ! C'est que l'expression du dessus tient compte de la composition de la dérive du périgée et de la précession de l'orbite et c'est elle qui est

finalement observée.
Pour i = 90°, il n'y a pas de précession de l'orbite et on a bien $Tp = - 4/3\ a^2\ T\ (1 - e^2)^2/(J_2 R_e^{\ 2})$

3. Précession du plan orbital. Satellites héliosynchrones.

3.1 Principe



Un satellite héliosynchrone est un satellite circulaire de rayon r quasi-polaire dont la précession du plan de l'orbite compense la rotation de la Terre autour du Soleil
T_p = 365,25 jours = $3{,}156.10^7$ s. Dans ces conditions le satellite repasse toujours au dessus de l'équateur à la même heure du jour.
La précession de l'orbite est liée à la forme ellipsoïdale de la planète.

3.2 Étude simplifiée d'un satellite circulaire passant près des pôles.

Le calcul complet est extrêmement complexe et je vais donc utiliser une méthode semi-intuitive valable pour les grands angles i, basée sur le fait que le satellite sur son orbite constitue un gyroscope de moment cinétique $L = m\ \omega\ a^2 = I\ \omega$ ($I = m\ a^2$ moment d'inertie du satellite sur son orbite). A cause de la forme ellipsoïdale de la planète, la force de gravitation n'est plus parfaitement centrale, il existe une composante parallèle à l'axe qui exerce un moment sur le gyroscope. Ce moment provoque la précession de l'orbite de vitesse angulaire Ω_p. La théorie du gyroscope donne :
$I\ \omega\ \Omega_p = M_F$ (M_F est le moment de la force gravitationnelle)

Force gravitationnelle **F = - grad (mV)**
$V = - GM/r\ (1 + J_2/2(\ 1 - 3\ \sin^2 i\ )\ R_e^{\ 2}/r^2)) = - GM/r\ -\ GMJ_2R_e^{\ 2}/2r^3 + 3\ GM\ J_2R_e^{\ 2}z^2/r^5$
($\sin i = z/r$)
$F_x = - m\ dV/dx = -\ GMm\ (\ x/r^3 + 3J_2R_e^{\ 2}x/2r^5 - 15\ J_2\ R_e^{\ 2}z^2x/r^7)$
$F_y = - m\ dV/dy = - GMm\ (\ y/r^3 + 3\ J_2\ R_e^{\ 2}y/2r^5 - 15\ J_2\ R_e^{\ 2}z^2y/r^7)$
$F_y = - m\ dV/dz = - GMm\ (\ z/r^3 + 3J_2\ R_e^{\ 2}z/2r^5 + 6J_2\ R_e^{\ 2}z/2r^5 - 15\ J_2\ R_e^{\ 2}z^3/r^7)$
$F = F_{centrale} + F_z$ $\quad F_{centrale} = - GMm\ (\ 1/r^2 + 3\ J_2\ R_e^{\ 2}/2r^4 - 15\ J_2\ R_e^{\ 2}z^2/r^6)$
$F_z = -3GMmJ_2\ R_e^{\ 2}z/r^5$

$M_{Fmax} = M_{Fc} + M_{Fz} = 0 + F_z\, r \cos i = -3GMmJ_2\, R_e^2 z \cos i\,/r^4$

$z = r \sin i$ donc $M_{Fmax} = -3J_2\, R_e^2 \cos i \sin i\,/r^3$ i étant proche de 90° on peut prendre $\sin i = 1$

Au cours d'une orbite, M_F passe de $-3J_2\, R_e^2 \cos i\,/r^3$ au sommet de l'orbite à 0 au passage au dessus de l'équateur donc il faut prendre la moyenne, c'est à dire la moitié, on a donc

$M_{moy} = -3/2\, J_2\, R_e^2 \cos i\,/r^3$

$I\,\omega\,\Omega_p = m\, r^2\, \omega\,\Omega_p = M_{moy} = -3/2\, GMmJ_2\, R_e^2 \cos i\,/r^3$

Pour une orbite circulaire $\omega^2 = GM/r^3$

$m\, r^2\, \omega\,\Omega_p = -3/2\ m\,\omega^2 J_2\, R_e^2 \cos i$

$\boldsymbol{\Omega_p = -3/2\ \omega\, J_2\, R_e^2 \cos i\,/r^2}$

$T_p = 2\pi/\Omega_p = -2/3\ r^2\, T/(J_2\, R_e^2 \cos i)$

D'après la troisième loi de Kepler, on a $T^2 = 4\pi^2 r^3/GM$ donc on obtient :

$\boldsymbol{T_p = 2\pi/\Omega_p = -4\pi/3\, (r^7/GM)^{1/2}/(J_2\, R_e^2 \cos i)}$ (Cette période est appelée période draconitique)

Pour que le satellite soit héliosynchrone, il faut que Ω_p soit positif, ce qui impose $i > 90°$

(En pratique i est proche de 100° et l'altitude inférieure à 1000 km)

$h = (9\, T_p^2\, G\, M\, J_2^2\, R_e^4 \cos^2 i/(16\,\pi^2))^{1/7} - R_e$

A.N : $T_p = 3{,}156.10^7$ s, $R_e = 6{,}37.10^6$ m $J_2 = 1{,}0826.10^{-3}$ $G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3\, s^{-2}\, kg^{-1}$

$M = 5{,}98.10^{24}$ kg

i = 97° donne h = 390 km

i = 98° donne h = 650 km

i = 99° donne h = 890 km

i = 100° donne h = 1110 km

Remarque : L'expression valable en général est :

$\boldsymbol{T_p = 2\pi/\Omega_p = -2/3\ (1 - e^2)^2\, a^2\, T/(J_2 R_e^2 \cos i)}$

Pour un satellite orbitant au dessus de l'équateur, on a deux dérives qui s'ajoutent, l'une est le décalage du périgée.

$\Omega_1 = 3\ J_2 R_e^2 \omega/(a^2(1 - e^2)^2)$ et l'autre est la précession de l'orbite

$\Omega_2 = -3/2\ J_2 R_e^2 \omega/(a^2(1 - e^2)^2)$, ce qui donne :

$\Omega_p = 3/2\ J_2 R_e^2 \omega/(a^2(1 - e^2)^2)$. On retrouve l'expression du 2.

Autre remarque :

L'expression $T_p = -2/3\ (1 - e^2)^2\, a^2\, T/(J_2 R_e^2 \cos i)$ est maximale quand $i = 0$, or pour cet angle, il n'y a plus de force latérale donc plus de moment et donc plus de précession de l'orbite. T_p devrait donc être infinie. L'explication est que la théorie sépare le mouvement global en deux composantes : Une précession du périhélie et une précession de l'orbite. La composition des deux précessions rend compte du mouvement global, mais cache les raisons physiques de la précession du satellite.