Animation

Interférences

par Gilbert Gastebois

Animation

I . Interférences lumineuses à deux fentes

1. Schéma

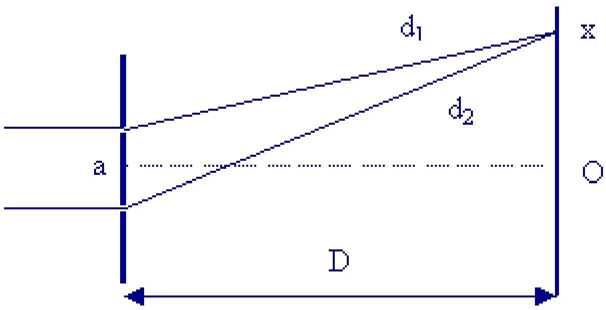
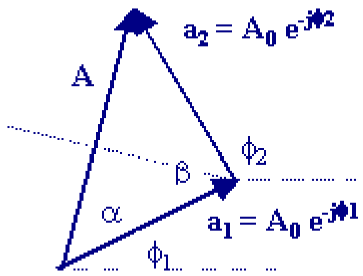


Schéma du montage



Construction de Fresnel

2. Différence de chemin entre les deux ondes.

La différence de chemin $\delta = d_2 - d_1$

$d_2 = (D^2 + (x+a/2)^2)^{1/2} = D\,(1 + (x+a/2)^2/D^2\ )^{1/2}$

$d_1 = (D^2 + (x-a/2)^2)^{1/2} = D\,(1 + (x-a/2)^2/D^2\ )^{1/2}$

D étant très supérieur à x et à a, on peut faire un développement de Taylor au premier ordre

$d_2 = D\,(1 + (x+a/2)^2/2D^2\ ) = D + (x+a/2)^2/2D$

$d_1 = D\,(1 + (x-a/2)^2/2D^2\ ) = D + (x-a/2)^2/2D$

$\delta = d_2 - d_1 = (x+a/2)^2/2D - (x-a/2)^2/2D = (x^2+a^2/4+ax - x^2-a^2/4 + ax)/2D = 2ax/2D = ax/D$

$\delta = ax/D$

Autre méthode : On pose $\tan\theta = x/D$ et θ étant petit, $\theta = x/D$
on voit que δ vaut approximativement $a\theta = ax/D$ **$\delta = ax/D$**

3. Somme des amplitudes.

3.1 Méthode des complexes

Onde 1 : $a_1 = A_0 \exp (j(\omega t - 2\pi d_1/\lambda))$

Onde 2 : $a_2 = A_0 \exp (j(\omega t - 2\pi d_2/\lambda))$

$a = a_1 + a_2 = A_0 (\exp (j(\omega t - 2\pi d_1/ \lambda)) + \exp (j(\omega t - 2\pi d_2/\lambda)))$

$a = A_\theta (e^{j\omega t} (\exp (-j\, 2\pi d_1/\lambda) + \exp (-j\, 2\pi d_2/\lambda))$

Sachant que

$e^{ja} + e^{jb} = e^{j(a/2+b/2+a/2-b/2)} + e^{j(a/2+b/2-(a/2-b/2))} = e^{j(a/2+b/2)}\, e^{j(a/2-b/2)} + e^{j(a/2+b/2)}\, e^{-j(a/2-b/2)}$

$e^{ja} + e^{jb} = e^{j(a/2+b/2)}\, (e^{j(a/2-b/2)} + e^{-j(a/2-b/2)}) = 2\, e^{a/2+b/2} \cos(a/2-b/2\ )$

alors $a = 2\, A_\theta\, e^{j\omega t - 2\pi(d2+d1)/2\lambda} \cos(\pi(d_2 - d_1)/\lambda) = 2\, A_\theta\, e^{j\omega t - 2\pi(d2+d1)/2\lambda} \cos(\pi\delta/\lambda)$

$a = 2\, A_\theta\, e^{j\omega t - \pi(d2+d1)/\lambda} \cos(\pi\delta/\lambda) = 2\, A_\theta\, e^{j\omega t - \pi(d2+d1)/\lambda} \cos(\pi\delta/\lambda)$

$a = 2\, A_\theta \cos (\pi ax/(\lambda D))\ e^{j\ \omega t + \pi(d2+d1)/\lambda} = A\, e^{j\omega t + \pi(d2+d1)/\lambda}$

$A = 2\, A_\theta \cos (\pi ax/(\lambda D))$

$$\mathbf{I = A^2 = 4\, A_\theta^2\ \cos^2 (\pi ax/(\lambda D))}$$

3.2 Méthode de Fresnel

Voir le schéma : $\mathbf{a = a_1 + a_2}$

$\varphi_1 = 2\pi d_1/\lambda$

$\varphi_2 = 2\pi d_2/\lambda$

$\beta = \varphi_1 + \pi - \varphi_2$

$2\alpha = \pi - \beta \Rightarrow \alpha = (\pi - \beta)/2$

$A/2 = A_\theta \cos\alpha$

$A = 2A_\theta \cos\alpha$

$\alpha = (\pi - \beta)/2 = (\varphi_2 - \varphi_1)/2 = \pi(d_2 - d_1)/\lambda = \pi\,\delta/\lambda = \pi a x/(\lambda D)$

$A = 2A_\theta \cos(\pi a x/(\lambda D))$

$$\mathbf{I = A^2 = 4\,A_\theta^2\,\cos^2(\pi a x/(\lambda D))}$$

4. Interfrange.

L'interfrange i est la distance entre deux maximums (ou deux minimums)

$I = I_{max}$ si $\cos^2(\pi a x/(\lambda D)) = 1$ donc si $\pi a x/((\lambda D)) = k\pi$

$ax/(\lambda D) = k \Rightarrow x = k\lambda D/a$ donc la distance entre deux maximums est $i = \lambda D/a$

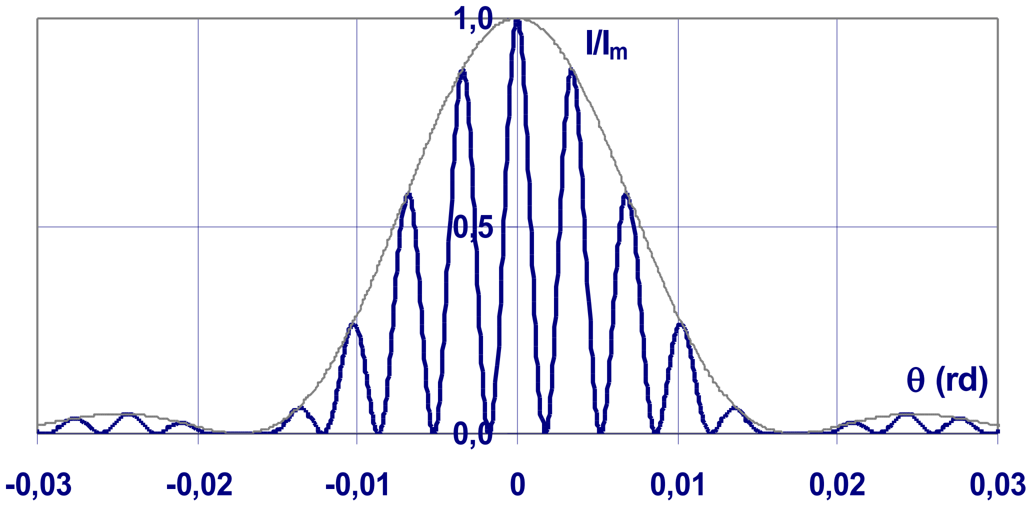
$$\mathbf{i = \lambda D/a}$$

5. Prise en compte de la largeur des fentes

La largeur e des fentes n'étant pas nulle, A_θ n'est pas constant, il est modulé par la figure de diffraction des fentes (Cf : Diffraction) :

$A_\theta = aA_0 \sin(\pi e x/(\lambda D))/(\pi e x/(\lambda D))$

$$\mathbf{I = I_m}\,\frac{\sin^2\left(\dfrac{\pi e\ x}{(\lambda D)}\right)}{\left(\dfrac{\pi e\ x}{(\lambda D)}\right)^2}\,\mathbf{\cos^2(\pi a\, x/(\lambda D))} \qquad I_m = a^2 A_0^2$$



$a = 150\ \mu m$

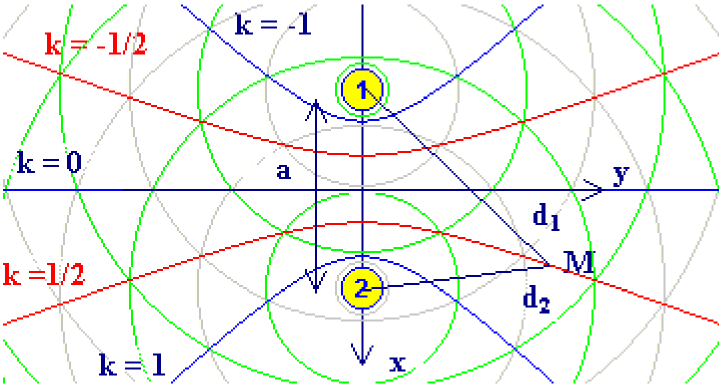
$e = 30\ \mu m$

$\lambda = 550\ nm$

$\theta = x/D$

II . Interférences à deux sources à la surface de l'eau

1. Schéma



2. Différence de chemin entre les deux ondes.

La différence de chemin $\delta = d_1 - d_2$

$d_1 = (y^2 + (x+a/2)^2)^{1/2}$

$d_2 = (y^2 + (x-a/2)^2)^{1/2}$

$(d_1 - d_2)^2 = ((y^2 + (x+a/2)^2)^{1/2} - (y^2 + (x-a/2)^2)^{1/2})^2$

$(d_1 - d_2)^2 = y^2 + (x+a/2)^2 + y^2 + (x-a/2)^2 - 2 ((y^2 + (x+a/2)^2)(y^2 + (x-a/2)^2))^{1/2} = \delta^2$

$2 ((y^2 + (x+a/2)^2) (y^2 + (x-a/2)^2))^{1/2} = y^2 + (x+a/2)^2 + y^2 + (x-a/2)^2 - \delta^2$

$2 ((y^2 + x^2 + a^2/4 + ax)(y^2 + x^2 + a^2/4 - ax))^{1/2} = y^2 + (x+a/2)^2 + y^2 + (x-a/2)^2 - \delta^2$

$2 ((y^4 + x^4 + a^4/16 - a^2 x^2 + 2y^2x^2 + y^2a^2/2 + x^2a^2/2))^{1/2} = 2y^2 + 2x^2 + a^2/2 - \delta^2$

On élève les deux membres au carré

$4y^4 + 4x^4 + a^4/4 - 4a^2 x^2 + 8y^2x^2 + 2y^2a^2 + 2x^2a^2 = 4y^4 + 4x^4 + 8y^2x^2 + a^4/4 + \delta^4 - a^2\delta^2 + 4y^2a^2 - 4y^2\delta^2 + 2x^2a^2 - 4x^2\delta^2$

$4a^2 x^2 = - \delta^4 + a^2\delta^2 + 4y^2\delta^2 + 4x^2\delta^2$ (Equation 1)

$\delta^4 - (a^2 + 4y^2 + 4x^2)\delta^2 + 4a^2 x^2 = 0$

$\delta^2 = ((a^2 + 4y^2 + 4x^2) - ((a^2 + 4y^2 + 4x^2)^2 - 16a^2 x^2)^{1/2}) / 2$

$\boldsymbol{\delta = (((a^2 + 4y^2 + 4x^2) - ((a^2 + 4y^2 + 4x^2)^2 - 16a^2 x^2)^{1/2}) / 2)^{1/2}}$

3. Équation des franges d'interférence.

Equation 1 : $4a^2 x^2 = - \delta^4 + a^2\delta^2 + 4y^2\delta^2 + 4x^2\delta^2$

$(4a^2 - 4\delta^2)x^2 = - \delta^4 + a^2\delta^2 + 4y^2\delta^2$

$(4a^2 - 4\delta^2)x^2 - (a^2 - \delta^2)\delta^2 = 4y^2\delta^2$

$(a^2 - \delta^2) (4x^2 - \delta^2) = 4y^2\delta^2$

$y^2 = (a^2/4 - \delta^2/4) (4x^2/\delta^2 - 1)$ (Equation d'une hyperbole)

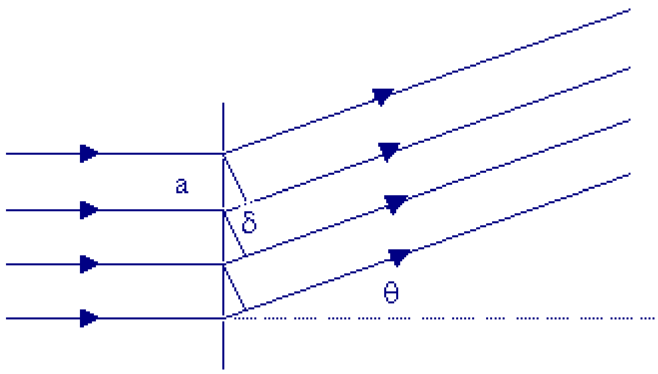
Si $\delta = (k + \varphi/(2\pi)) \lambda$, on a des interférences constructives.

Si $\delta = (k + \varphi/(2\pi) + 1/2) \lambda$, on a des interférences destructives.

k est un entier relatif et φ est le déphasage entre les deux sources.

III . Interférences à N fentes (le réseau)

1. Schéma



Le réseau est un ensemble de N fentes séparées d'une même distance a. Les ondes lumineuses de longueur d'onde λ interfèrent à l'infini à leur sortie dans la direction faisant un angle θ avec la direction d'incidence. On a en général plusieurs dizaines ou centaines de fentes par mm. Chaque onde est déphasée de δ par rapport à sa voisine : $\delta = a \sin\theta$
ce qui correspond à l'angle de déphasage $\varphi = 2\pi\delta/\lambda$

2. Somme des amplitudes et intensité lumineuse.

A l'infini, les ondes venant des N fentes s'ajoutent, chacune d'amplitude A_θ, étant déphasée de φ par rapport à la précédente :

$A = A_\theta (1 + e^{j\varphi} + e^{j2\varphi} + e^{j3\varphi} + ... + e^{j(N-1)\varphi}) = A_\theta (1 - e^{jN\varphi})/(1 - e^{j\varphi})$ On a une somme géométrique de raison $e^{j\varphi}$

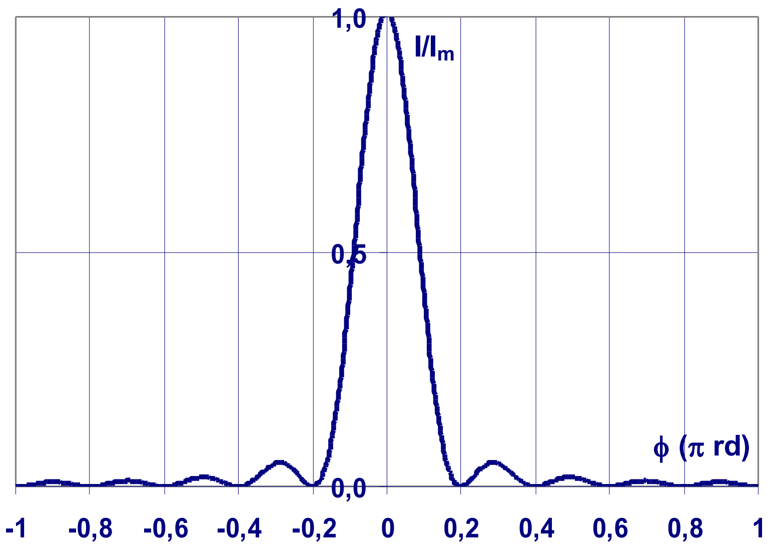
$A = A_\theta e^{jN\varphi/2} (e^{-jN\varphi/2} - e^{jN\varphi/2})/(e^{j\varphi/2} (e^{-j\varphi/2} - e^{j\varphi/2})) = A_\theta e^{j(N-1)\varphi/2} \sin(N\varphi/2)/\sin(\varphi/2)$

$I = AA^* = A_\theta^2 \sin^2(N\varphi/2)/\sin^2(\varphi/2)$

$$\mathbf{I = A_\theta^2} \frac{\sin^2(\frac{N\phi}{2})}{\sin^2(\frac{\phi}{2})} = \mathbf{A_\theta^2} \frac{\sin^2(\frac{N\pi a \sin\theta}{\lambda})}{\sin^2(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda})}$$

L'amplitude maximale I_m correspond à $\varphi/2$, vaut $n\pi$, on a alors

$I_m = A_\theta^2 (N\varphi/2)^2/(\varphi/2)^2 = N^2 A_\theta^2$



N = 10

a = 10 µm

λ = 550 nm

$I/I_m = \sin^2(N\varphi/2)/\sin^2(\varphi/2) /N^2$

$\varphi = 2\pi a \sin\theta/\lambda$

$\varphi = 2\pi a\theta/\lambda$ si θ est petit

3. Prise en compte de la largeur des fentes

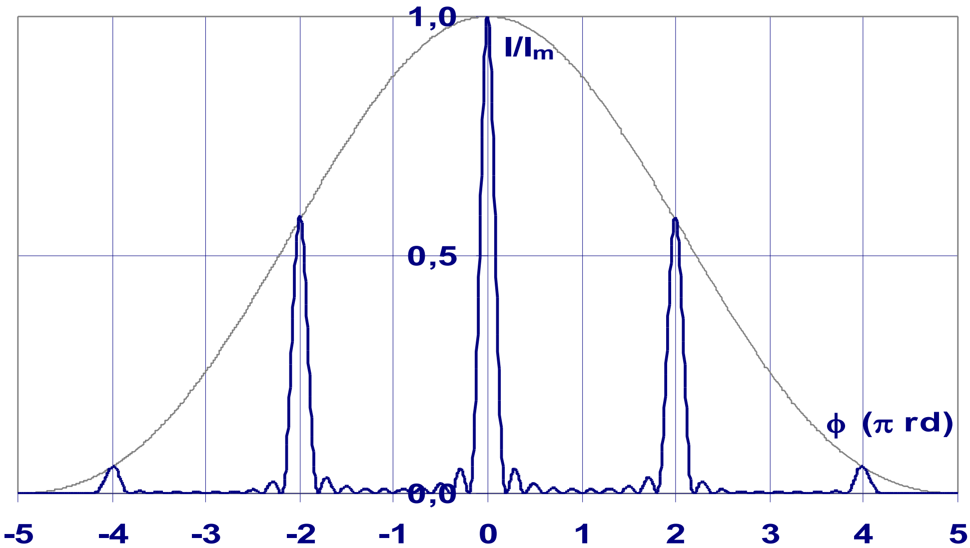
La largeur e des fentes n'étant pas nulle, A_θ n'est pas constant, il est modulé par la figure de diffraction des fentes (Cf : Diffraction) :

$A_\theta = e A_0 \sin(\pi e \sin\theta/\lambda)/(\pi e \sin\theta/\lambda)$

$$\mathbf{I = e^2} A_0^2 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi e \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi e \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{N \pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)} \qquad I_m = N^2 e^2 A_0^2$$

4. Position des raies.

I est maximum quand $\varphi/2$ vaut $n\pi$ donc quand φ vaut $2n\pi$
$\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 2\pi a \sin\theta/\lambda = 2n\pi$ donc $\sin\theta = n\lambda/a$
On a donc une raie pour θ tel que **$\sin\theta = n\lambda/a$ (n entier relatif)**
si θ est petit, **$\theta = n\lambda/a$**



$N = 10$

$a = 10$ µm

$e = 4$ µm

$\lambda = 550$ nm

$\varphi = 2\pi a \sin\theta/\lambda$

$\varphi = 2\pi a\theta/\lambda$

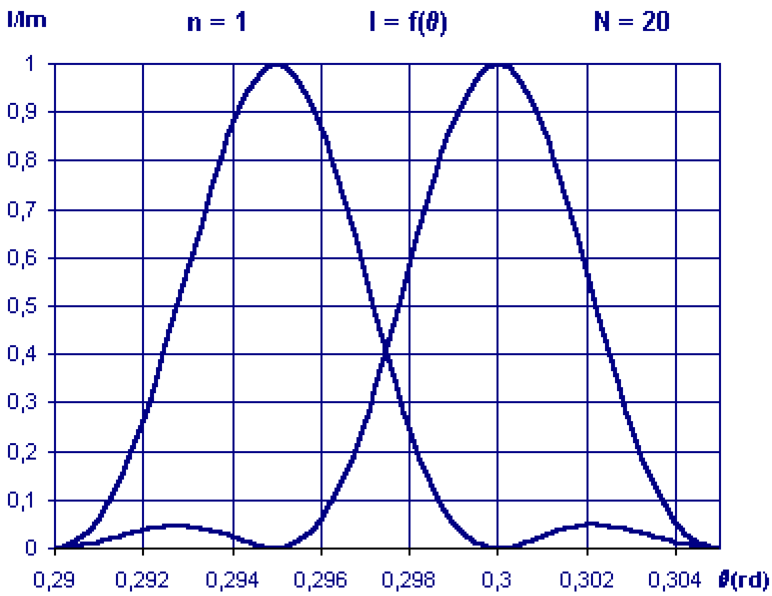
si θ est petit

L'intensité maximale se trouve dans l'ordre n = 0 qui ne sépare pas les longueurs d'ondes.
C'est un inconvénient qui est pallié par le réseau échelette

5. Largeur des raies et pouvoir de résolution du réseau.

On a $I = 0$ si $\sin(N\varphi/2) = 0$ donc si $N\varphi/2$ vaut $n\pi$ donc quand φ vaut $2n\pi/N$
ou si $\varphi = 2\pi\delta/\lambda = 2\pi a \sin\theta/\lambda = 2n\pi/N$ donc $\sin\theta = n\lambda/(Na)$ (N est très grand donc θ est très petit et $\sin\theta = \theta$)
donc $\theta = n\lambda/(Na)$
Le premier minimum correspond à n = 1 donc à $\theta_1 = \lambda/(Na)$
La largeur d'une raie correspond au double de θ_1 et vaut donc **$2\lambda/(Na)$**

Pouvoir de résolution
$\theta = n\lambda/a$ donc θ dépend de λ et le réseau permet de disperser une lumière composée et d'obtenir son spectre.
Deux raies de longueurs d'onde λ et λ' peuvent être séparées si le maximum de λ' correspond au premier minimum de λ (critère de Rayleigh)



$\varphi = 2\pi a \sin\theta/\lambda$

si les angles sont petits
$\theta_1 = n\lambda/a$
$\theta_2 = n\lambda'/a = \theta_1 + \lambda/(Na)$

Donc pour λ', $\theta = n\lambda'/a$ et pour λ, $\theta = n\lambda/a + \lambda/(Na)$
$n\lambda'/a = n\lambda/a + \lambda/(Na)$, donc $\lambda'/a = \lambda/a + \lambda/(nNa)$ et $\lambda' = \lambda + \lambda/(nN)$
$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda/(nN)$ donc $\Delta\lambda/\lambda = 1/(nN)$

Le pouvoir de résolution vaut $\lambda/\Delta\lambda = nN$ (n : ordre des raies et N : nombre de fentes utiles du réseau)