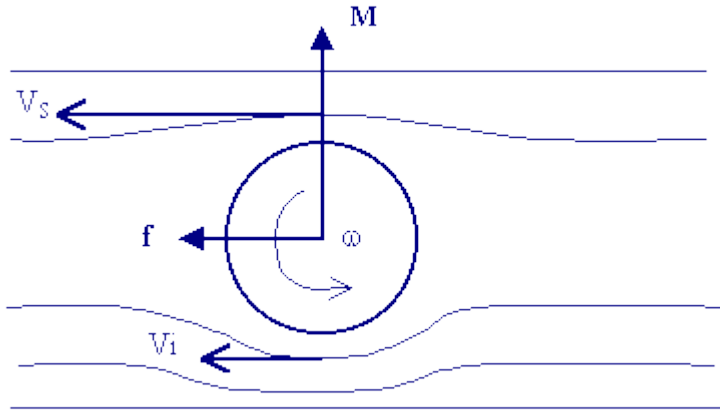


par Gilbert Gastebois

1. Principe

1.1 Notations



V_s est la vitesse apparente de l'air au dessus de la balle
 V_i est la vitesse apparente de l'air au dessous de la balle.
 ω vitesse angulaire de rotation de la balle

f est la force de frottement de l'air
 M est la force de Magnus

R rayon de la sphère
 ρ masse volumique du fluide

La rotation de la balle entraîne par frottement, l'air qui se trouve à sa surface, dans ces conditions les vitesses de l'air par rapport au centre de la balle, s'ajoutent au dessus de la balle et se retranchent en dessous. La vitesse apparente de l'air est ainsi plus grande au dessus qu'en dessous, on a alors un effet de portance vers le haut, c'est l'effet Magnus. C'est cet effet qui est responsable de la courbure de la trajectoire des balles "brossées".

L'effet de portance est lié à la loi de Bernoulli (et pas Bernoulli !) qui, appliquée dans ce cas, donne $\rho v^2 + \gamma p = \text{constante}$. Si v est plus grand, la pression p est plus faible. La balle subit ainsi une pression plus faible d'un côté que de l'autre, ce qui entraîne une dérive latérale.

1.2 Expressions

Les grandeurs des forces de frottement f et de Magnus M sont données par la théorie des fluides. On trouve dans la littérature les expressions suivantes :

$$f = - f/v \ v \qquad f = 0,5 C_D \pi R^2 \rho v^2$$

$$M = M/(v\omega) \ \omega \times v \qquad M = 0,5 C_M \pi R^2 \rho v^2 = C_M/C_D f$$

(sans frottement, pas d'effet Magnus) (\times est le produit vectoriel)
 où ρ est la masse volumique du fluide.

Les coefficients C_D et C_M dépendent pour les fluides (air) de la vitesse v , de la vitesse de rotation ω de la balle, de l'angle α entre v et ω , de son rayon R et de son état de surface.

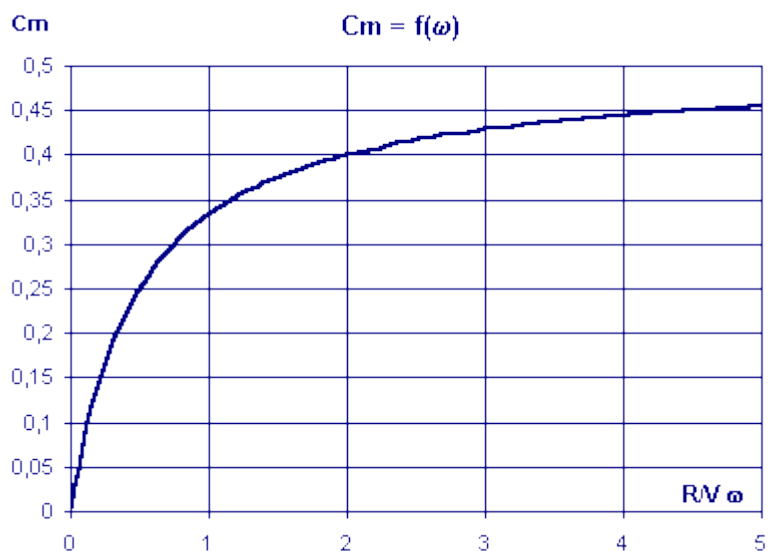
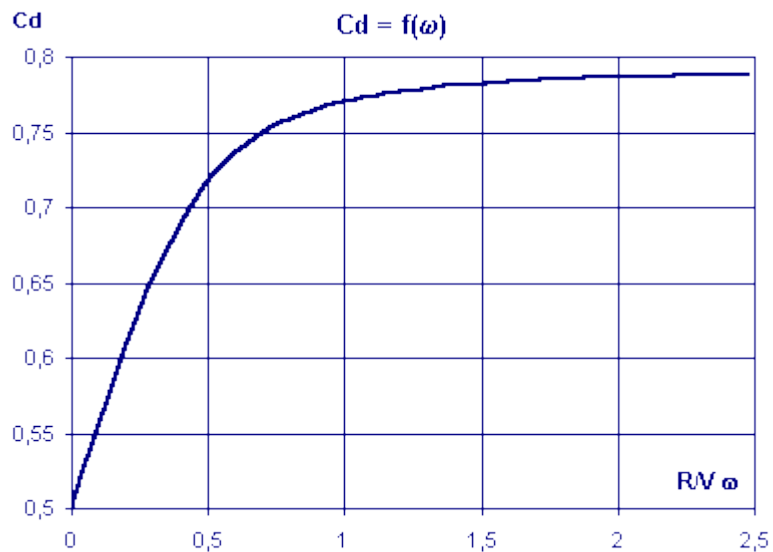
On trouve dans la même littérature des expressions de ces coefficients :

$$C_M = 1/(2 + v/(R\omega \sin\alpha)) \quad (0 < C_M < 0,5)$$

$$C_D = C + (1/(A + (B v/R\omega \sin\alpha)^{5/2}))^{2/5} \quad \alpha \text{ est l'angle entre } \omega \text{ et } v$$

Les coefficients A, B et C sont obtenus expérimentalement. (C dépend de l'état de surface. Pour une sphère parfaitement lisse, il vaut 0,42)

Par exemple, pour une balle de tennis : C = 0,51 A = 22 et B = 1,77



1.3 Expressions approchées pour ω faible.

Ces expressions sont approximativement valables dans certaines limites raisonnables de v et ω ($10 < v < 40\text{m/s}$ et $\omega < 300\text{ rd/s}$)

En général, la durée du mouvement étant faible, on peut négliger la décélération de la révolution de la balle, on considère donc que ω est constant. Sinon, on peut prendre une décroissance exponentielle de ω avec le temps : $\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}$, (τ valant une dizaine de secondes)

D'autre part, si $R\omega \ll v$, ce qui est souvent le cas, notamment pour une balle de tennis, de ping-pong ou un ballon de football, on peut simplifier les expressions des coefficients C_D et C_M

$$C_D = C + 0,56 R\omega \sin\alpha / v = C$$

$$C_M = (R\omega \sin\alpha / v) / (1 + 2R\omega \sin\alpha / v) = (R\omega \sin\alpha / v)(1 - 2R\omega \sin\alpha / v) = R\omega \sin\alpha / v$$

$$C_D = C \quad (\text{voisin de } 0,4 \text{ ou } 0,5)$$

$$C_M = R\omega \sin\alpha / v$$

$$\mathbf{f} = -0,5 C \pi R^2 \rho v \mathbf{v}$$

$$\mathbf{M} = 0,5 \pi R^3 \rho \sin\alpha \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\sin\alpha = \text{Norm}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) / v\omega = 1/v\omega \left((\omega_y v_z - \omega_z v_y)^2 + (\omega_z v_x - \omega_x v_z)^2 + (\omega_x v_y - \omega_y v_x)^2 \right)^{1/2}$$

si $\boldsymbol{\omega}$ est et reste perpendiculaire à \mathbf{v} , on a :

$$\mathbf{M} = 0,5 \pi R^3 \rho \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

2. Établissement des formules approchées.

2.1 Expression du frottement

On étudie une plaque de surface S placée dans un fluide de masse volumique ρ se déplaçant à la vitesse \mathbf{v} perpendiculaire à S

Une masse m de fluide est arrêtée par la surface, ce qui augmente sa pression de p . La compression est rapide, elle est donc essentiellement adiabatique, l'énergie mécanique est donc conservée. Par conservation de l'énergie on a $E_c = E_{\text{pression}}$

$$\text{donc } 1/2 m v^2 = pV \quad (V \text{ volume du gaz}) \quad \text{et } 1/2 m/V v^2 = p \quad \text{ou} \quad 1/2 \rho v^2 = p$$

$$\text{La force de frottement appliquée à la surface } S \text{ est donc } \mathbf{f} = pS = 1/2 \rho S v^2$$

Si l'objet n'a pas une surface plane, il faut intégrer la pression sur la surface avant de l'objet, mais le résultat est identique car l'intégrale donne encore $1/2 \rho S v^2$ (S représente alors la section perpendiculaire à \mathbf{v} . Cependant si l'objet n'est pas plat et même s'il est plat d'ailleurs, toute l'énergie cinétique n'est pas convertie car le fluide peut s'écouler sur les côtés sans être beaucoup ralenti. Il faut donc en tenir compte en ajoutant un coefficient C_D qui dépend de la forme et de l'état de surface du solide et aussi un peu de la vitesse v et de la rotation ω .)

$$\mathbf{f} = 0,5 C_D \rho S v^2$$

$$\text{Pour une sphère } S = \pi R^2, \text{ donc } \mathbf{f} = 0,5 C_D \pi R^2 \rho v^2$$

Remarque : Si la vitesse devient très faible, la théorie ne s'applique plus, le fluide n'est presque pas comprimé, il glisse sur la surface de l'objet et c'est la viscosité η qui est responsable du frottement. Pour une sphère, on obtient $\mathbf{f} = -6 \pi \eta R \mathbf{v}$ (formule de Stokes)

2.2 Expression de la force de Magnus pour un faible ω perpendiculaire à v

La formule de Bernoulli rend compte de la conservation de l'énergie dans un tube de courant :

$$E_c + U_{\text{interne}} + E_{\text{pression}} + E_p = \text{constante}$$

$$\text{donc } 1/2 \rho v^2 + U + pV + \rho Vgz = \text{cste} \quad \text{ou} \quad 1/2 \rho v^2 + U/V + p + \rho gz = \text{cste}$$

Pour un gaz considéré comme parfait, $U = pV/(\gamma - 1)$, d'autre part, on peut négliger la variation de E_p , on a ainsi

$$1/2 \rho v^2 + p \gamma/(\gamma - 1) = \text{cste} \quad \text{Pour l'air (gaz diatomiques) } \gamma = 1,4$$

On étudie un cylindre de rayon R et de longueur l , tournant à la vitesse angulaire ω dans un fluide se déplaçant à la vitesse v horizontale.

Le cylindre en tournant entraîne le fluide. A sa surface le fluide a la même vitesse d'entraînement $R\omega$ que la surface, cette vitesse s'ajoute algébriquement à la vitesse du fluide qui s'écoule le long de la surface. Cette vitesse est plus grande que v car ce fluide parcourt la distance πR pendant que le fluide éloigné ne parcourt que $2R$, elle vaut donc $\pi/2 v$.

La vitesse résultante $v_h = \pi/2 v + R\omega$ au dessus et $v_b = \pi/2 v - R\omega$ au dessous.

D'après Bernoulli, $1/2 \rho v_h^2 + p_h \gamma/(\gamma - 1) = 1/2 \rho v_b^2 + p_b \gamma/(\gamma - 1)$ donc

$$\Delta p = p_b - p_h = 1/2 \rho(\gamma - 1)/\gamma (v_h^2 - v_b^2) = \rho(\gamma - 1)/\gamma \pi v R\omega$$

Δp est la surpression appliquée sur la face inférieure du cylindre. La force de pression sur un élément de surface dS du cylindre est donc :

$$dF = \Delta p dS = \Delta p l R d\theta = \pi \rho(\gamma - 1)/\gamma v l R^2 \omega d\theta. \quad (\theta \text{ étant l'angle entre le déplacement et le rayon passant par le point considéré sur le cylindre})$$

La composante verticale de cette force $dM = dF \sin\theta = \pi \rho(\gamma - 1)/\gamma R^2 l v \omega \sin\theta d\theta$

La force verticale résultante M est l'intégrale de $dM = \pi \rho(\gamma - 1)/\gamma R^2 l v \omega \sin\theta d\theta$ intégrée de 0 à π .

L'intégrale de 0 à π de $\sin\theta d\theta$ vaut 2 , donc

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \pi \rho \mathbf{R}^2 l v \boldsymbol{\omega} = \mathbf{K} \pi \rho \mathbf{R}^2 l \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad \text{En posant } \mathbf{K} = 2(\gamma - 1)/\gamma \quad \text{pour les gaz}$$

(relation 1)

La valeur de K tend vers 2 pour un fluide incompressible en mouvement laminaire. Pour les mouvements dans un gaz parfait diatomique

$$K \text{ vaut } 2(\gamma - 1)/\gamma = 4/7.$$

Cette valeur est certainement trop grande car la couche limite ne colle pas à l'ensemble du demi-cylindre, elle décolle au $2/3$ environ de son parcours et donc on obtient un K voisin de $3/8$ plutôt que $4/7$, pour un cylindre se déplaçant dans l'air.

De plus à cause de la rotation, la vitesse des filets d'air diffère de $2R\omega$ entre le dessus et le dessous, ce qui fait que les filets ne parcourent pas la même distance avant de décoller. La conséquence est que pour les petites valeurs de ω , on doit avoir $K = 3/8(1 - 2\omega R/v)$. D'autre part, cela doit générer un frottement supplémentaire donc f doit augmenter avec $\omega R/v$. C'est en effet ce qu'on observe. (Cf : 1.3 pour $\alpha = \pi/2$)

Pour une sphère, le calcul est essentiellement le même. Une sphère est un empilement de cylindres de longueur dl et de rayon r variant de 0 à R pour un angle φ variant de 0 à $\pi/2$... On a $r = R \sin\varphi$.

La force dM appliquée sur une tranche de sphère de largeur $dl = R d\varphi \sin\varphi$ vaut donc, d'après la relation 1 :

$$dM = K\pi \rho r^2 v \omega R \sin\varphi d\varphi = K\pi \rho v \omega R^3 \sin^3\varphi d\varphi$$

Il reste à intégrer dM de $\varphi = 0$ à π . L'intégrale de $\sin^3\varphi d\varphi$ de 0 à π donne $4/3$ donc

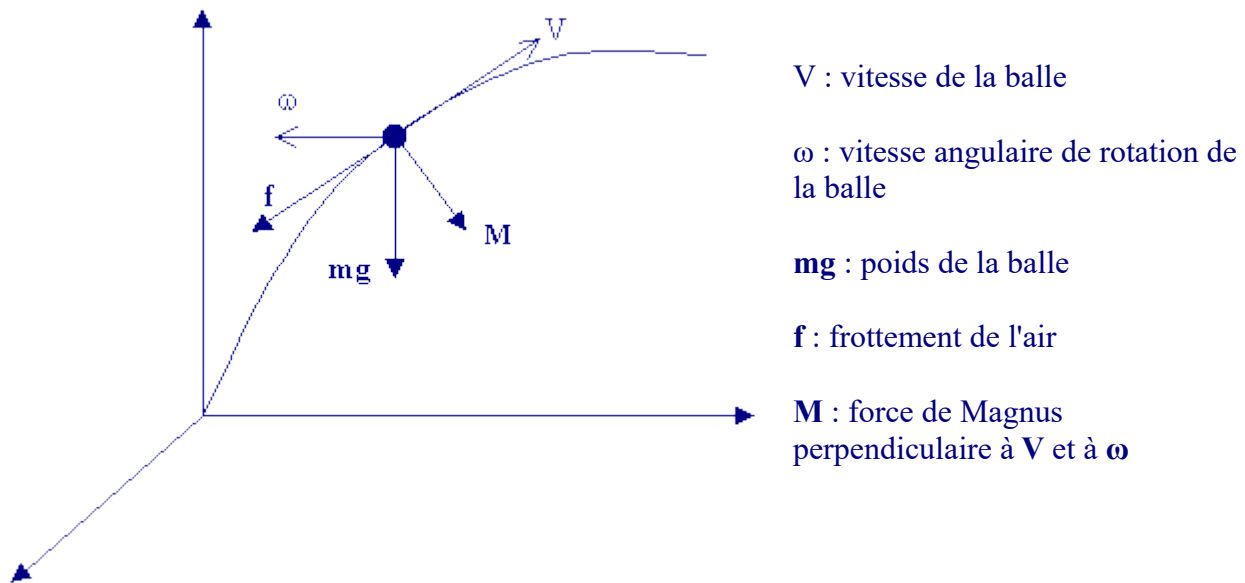
$$\mathbf{M} = 4/3 K \pi \rho \mathbf{R}^3 v \boldsymbol{\omega} = 4/3 K \pi \rho \mathbf{R}^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Pour les mouvements dans l'air, K vaut aux alentours de $3/8$.

$$\mathbf{M} = \mathbf{0,5} \pi \rho \mathbf{R}^3 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

3. Équations différentielles du mouvement

On obtient alors le schéma des forces suivant :



La trajectoire de la balle est alors définie par les équations de Newton pour le vecteur position **r**:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g} + \mathbf{f} + \mathbf{M}$$

avec les conditions initiales : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ et $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$

ce qui donne, en projection cartésienne :

$$\begin{aligned} m a_x &= -f/v v_x + M/(v\omega) (\omega_y v_z - \omega_z v_y) \\ m a_y &= -f/v v_y + M/(v\omega) (\omega_z v_x - \omega_x v_z) \\ m a_z &= -m g - f/v v_z + M/(v\omega) (\omega_x v_y - \omega_y v_x) \end{aligned}$$

$$m x'' = -0,5 C \pi R^2 \rho v x' + 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha (\omega_y z' - \omega_z y')$$

$$m y'' = -0,5 C \pi R^2 \rho v y' + 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha (\omega_z x' - \omega_x z')$$

$$\sin \alpha = ((\omega_y v_z - \omega_z v_y)^2 + (\omega_z v_x - \omega_x v_z)^2 + (\omega_x v_y - \omega_y v_x)^2)^{1/2} / (v\omega)$$

$$m z'' = -m g - 0,5 C \pi R^2 \rho v z' + 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha (\omega_x y' - \omega_y x')$$

$$(v = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{1/2} \text{ et } C \text{ voisin de } 0,5)$$

équations qui peuvent être ensuite résolues numériquement.

4. Trajectoire d'une balle de tennis

4.1 Caractéristiques du mouvement

Balle de Tennis : $R = 3,25 \text{ cm}$, $m = 55 \text{ g}$ et $C = 0,51$ On obtient :

$$0,5 \pi R^2 \rho / m = 0,037 \text{ m}^{-1}$$

Balle de Tennis liftée : $y' = 0$ et $\omega_y = \omega$ $\omega_x = 0$ $\omega_z = 0$ et ω perpendiculaire à v

donc $\sin \alpha = 1$

$$x'' = -0,019 v x' + 1,2 \cdot 10^{-3} \omega z'$$

$$z'' = -g - 0,019 v z' - 1,2 \cdot 10^{-3} \omega x'$$

$$y'' = 0$$

La balle reste dans le plan vertical xOz et subit une force supplémentaire vers le bas qui augmente la courbure de la trajectoire et diminue la portée.

Balle de Tennis coupée : $y' = 0$ et $\omega_y = -\omega$ $\omega_x = 0$ $\omega_z = 0$ et ω perpendiculaire à v

donc $\sin \alpha = 1$

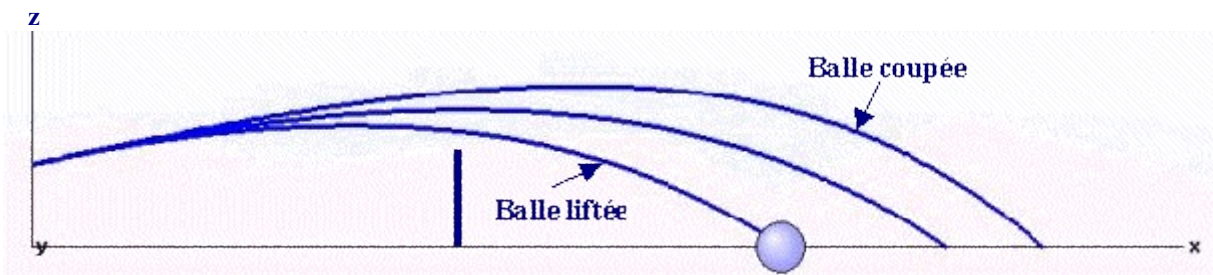
$$x'' = -0,019 v x' - 1,2 \cdot 10^{-3} \omega z'$$

$$z'' = -g - 0,019 v z' + 1,2 \cdot 10^{-3} \omega x'$$

$$y'' = 0$$

La balle reste dans le plan vertical xOz et subit une force supplémentaire vers le haut qui diminue la courbure de la trajectoire et augmente la portée.

En général les balles coupées vont moins loin sur le court, mais c'est parce qu'elles sont frappées moins fort. A vitesse de départ égale, elle vont plus loin... et sortent du court.



4.2 Linéarisation des équations. Équations horaires du mouvement

L'expérience montre que la vitesse de la balle ne varie pas énormément au cours de sa trajectoire. Dans ces conditions, on peut prendre une valeur moyenne pour v (En prenant $v_{\text{moy}} = 0,9 v_{\text{initiale}}$ on obtient un excellent résultat, bien meilleur que ce qu'on pourrait penser, l'approximation semblant tout de même assez sauvage...).

On a alors

$$v_x' = -f v_x + K v_z$$

$$v_z' = -g - f v_z - K v_x \quad f = 0,019 v_{\text{moy}} \quad K = 1,2 \cdot 10^{-3} \omega$$

$K > 0$: Balle liftée et $K < 0$: Balle coupée

Conditions initiales : A $t = 0$, $x = 0$ $z = z_0$ $v_x = v_{0x}$ $v_z = v_{0z}$

On cherche une solution en $v_x = v_1 + b_1 e^{\alpha t}$ et $v_z = v_2 + b_2 e^{\alpha t}$

En reportant dans les deux équations différentielles, on obtient :

$$\alpha = -f \pm i K \quad \text{On choisit par exemple } \alpha = -f + i K, \text{ on a alors } b_2 = i b_1$$

On pose $b_1 = A - i B$, donc $b_2 = B + i A$

En remplaçant dans v_x et v_z et en prenant la partie entière des expressions obtenues, on a :

$$v_x = v_1 + e^{-ft} (A \cos(Kt) + B \sin(Kt)) \quad \text{avec } v_1 = -Kg/(K^2 + f^2)$$

$$v_z = v_2 + e^{-ft} (B \cos(Kt) - A \sin(Kt)) \quad \text{avec } v_2 = -fg/(K^2 + f^2)$$

On obtient alors, en tenant compte des conditions initiales :

$$v_x = v_1 + e^{-ft} ((v_{0x} - v_1) \cos(Kt) + (v_{0z} - v_2) \sin(Kt)) \quad v_1 = -Kg/(K^2 + f^2)$$

$$v_z = v_2 + e^{-ft} ((v_{0z} - v_2) \cos(Kt) - (v_{0x} - v_1) \sin(Kt)) \quad v_2 = -fg/(K^2 + f^2)$$

En intégrant et en tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$x = v_1 t + d_1 (1 - e^{-ft} \cos(Kt)) + d_2 e^{-ft} \sin(Kt)$$

$$d_1 = (f(v_{0x} - v_1) + K(v_{0z} - v_2))/(K^2 + f^2)$$

$$z = v_2 t - d_2 (1 - e^{-ft} \cos(Kt)) + d_1 e^{-ft} \sin(Kt) + z_0$$

$$d_2 = (K(v_{0x} - v_1) - f(v_{0z} - v_2))/(K^2 + f^2)$$

5. Le coup franc de Roberto Carlos

5.1 Caractéristiques du mouvement

En 1997, au cours d'un match amical contre la France, le brésilien Roberto Carlos, à la suite d'un coup franc, marqua un but d'anthologie qui illustre magnifiquement l'effet Magnus sur un ballon brossé. Le ballon tiré tendu, à une vitesse linéaire et de rotation époustouflantes contourna le mur adverse en infléchissant sa course suffisamment pour entrer au pied du poteau de but. Un truc à transformer un gardien de but (Fabien Barthez) en gardien de chèvres !

$$R = 11 \text{ cm}, \quad m = 430 \text{ g} \quad \text{et} \quad C = 0,45 \quad \text{On obtient : } 0,5 \pi R^2 \rho / m = 0,054 \text{ m}^{-1}$$

$$\omega_y = 0$$

$$M = 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega \times v \quad \text{donc}$$

$$M_x = -0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_z v_y \quad M_y = 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_z v_x - 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_x v_z \quad \text{et}$$

$$M_z = 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_x v_x$$

On a alors

$$v_x' = -f v_x - 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_z v_y$$

$$v_y' = -f v_y + 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_z v_x - 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_x v_z$$

$$v_z' = -g - f v_z + 0,5 \pi R^3 \rho \sin \alpha \quad \omega_x v_x \quad f = 0,5 C \pi R^2 \rho v \quad \text{et}$$

$$\sin \alpha = ((\omega_z v_y)^2 + (\omega_z v_x - \omega_x v_z)^2 + (\omega_y v_x)^2)^{1/2} / (v \omega)$$

5.2 Équations différentielles approchées

Le tir étant tendu, l'angle de tir est faible (autour de 15°), $\omega_z = 0,97\omega$, on pourra donc simplifier le problème en prenant $\omega_z = \omega$ et $\omega_x = 0$

Cependant, contrairement à la balle de tennis où ω est horizontale et où ω et v restent perpendiculaires, ce n'est pas le cas ici où ω est vertical, il faut en tenir compte, $\sin \alpha < 1$ et il diminue au cours du mouvement, ce n'est pas un petit effet, il faut prendre une valeur moyenne à nouveau. En étudiant la trajectoires réelle, on s'aperçoit qu'il faut prendre $\sin \alpha_{\text{moy}} = 0,5$.

Comme pour la balle de tennis, on prend une moyenne pour la vitesse, mais là, la vitesse diminue beaucoup, il faut prendre $v_{\text{moy}} = 0,75 v_{\text{initiale}}$ pour avoir des trajectoires proches.

On a alors

$$v_x' = -f v_x - K v_y$$

$$v_y' = -f v_y + K v_x$$

$$v_z' = -g - f v_z \quad f = 0,025 v_{\text{moy}} \quad K = 0,25 \pi R^3 \rho \sin \alpha_{\text{moy}} / m \quad \omega = 3,0 \cdot 10^{-3} \omega$$

$$\text{Conditions initiales : } A t = 0, \quad x = 0 \quad y = 0 \quad z = 0 \quad v_x = v_{0x} \quad v_y = 0 \quad v_z = v_{0z}$$

On cherche une solution en $v_x = a_1 e^{\alpha t}$ et $v_y = a_2 e^{\alpha t}$. En reportant dans les deux premières équations différentielles, on obtient :

$$\alpha = -f \pm i K \quad \text{On choisit par exemple } \alpha = -f + i K, \text{ on a alors } a_2 = -i a_1$$

On pose $a_1 = A + i B$, donc $a_2 = B - i A$

En remplaçant dans v_x et v_y et en prenant la partie entière des expressions obtenues, on a :

$$v_x = e^{-ft} (A \cos(Kt) - B \sin(Kt))$$

$$v_y = e^{-ft} (B \cos(Kt) + A \sin(Kt))$$

$$v_z' = -g - f v_z \quad \text{La solution est } v_z = A e^{-ft} - g/f$$

On obtient alors, en tenant compte des conditions initiales :

$$v_x = v_{0x} e^{-ft} \cos(Kt)$$

$$v_y = v_{0x} e^{-ft} \sin(Kt)$$

$$v_z = (v_{0z} + g/f) e^{-ft} - g/f$$

En intégrant et en tenant compte des conditions initiales, on obtient :

$$x = d_1 (1 - e^{-ft} \cos(Kt)) + d_2 e^{-ft} \sin(Kt) \quad d_1 = f v_{0x} / (K^2 + f^2)$$

$$y = d_2 (1 - e^{-ft} \cos(Kt)) - d_1 e^{-ft} \sin(Kt) \quad d_2 = K v_{0x} / (K^2 + f^2)$$

$$z = -g/f t + (v_{0z}/f + g/f^2) (1 - e^{-ft})$$

Revenons au coup franc de Roberto Carlos : Il est à peu près à 35 m du but, sa balle s'élève au maximum à peu près à deux fois la hauteur des joueurs. La déviation due à l'effet Magnus est difficile à estimer, elle semble être de l'ordre de 5 ou 6 m, ce qui est considérable.

Si on prend une vitesse initiale de 38 m/s (un coup de pied de mule habituel chez Roberto), un angle de 16° et une vitesse de rotation du ballon de 11 tours/s ($\omega = 69 \text{ rd/s}$), on obtient en traçant $x = f(t)$, $y = f(t)$ et $z = f(t)$:

Un temps de vol de 1,77 s, une altitude maximale de 3,8 m, une portée de 36 m et une déviation latérale de 5,3 m.

Voilà qui semble assez bien correspondre...

Cependant, les approximations sont assez grossières et les résultats obtenus, surtout pour y, ne sont que des ordres de grandeur.

* Les puristes pourront contester la dénomination d'effet Magnus pour une sphère et préférer parler d'effet Robin. L'effet Magnus étant réservé à l'effet sur un cylindre. J'ai utilisé effet Magnus, car il est beaucoup plus connu.