# Théorie de l'électromagnétisme

**par Gilbert Gastebois**

## 1. Rappels mathématiques

La théorie de Maxwell fait appel à quelques fonctions spécifiques :
Le gradient : grad = $\nabla\Psi$ ( $d\Psi/dx$, $d\Psi/dy$, $d\Psi/dz$ )
La divergence : div = $\nabla.\mathbf{V} = dVx/dx + dVy/dy + dVz/dz$
Le rotationnel : rot = $\nabla \wedge \mathbf{V}$ ( $dVz/dy - dVy/dz$ , $dVx/dz - dVz/dx$, $dVy/dx - dVx/dy$ )
Le laplacien : $\nabla^2\Psi = \nabla.\nabla\Psi = \text{div}(\text{grad}\ \Psi) = d^2\Psi/dx^2 + d^2\Psi/dy^2 + d^2\Psi/dz^2$
On peut définir le laplacien d'un vecteur : $\nabla^2\mathbf{V}$ ( $\Delta^2Vx$, $\Delta^2Vy$, $\Delta^2Vz$ )

div(rot **V**) = 0
rot(grad **V**) = 0
rot(rot **V**) = grad(div **V**) - div(grad **V**) = grad(div **V**) - $\nabla^2\mathbf{V}$

**Théorème de Gauss**

$\int \mathbf{A.dS} = \int \text{div A dV}$ L'intégrale de A.dS sur une surface S fermée est égale à l'intégrale de div A dV sur le volume V englobé par S.

**Théorème de Stokes**

$\int \mathbf{A.dl} = \int \text{rot}\ \mathbf{A.dS}$ L'intégrale de A.dl sur une ligne l fermée est égale à l'intégrale de rot A.dS sur toute surface s'appuyant sur l.

## 2. Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell relient les champs électrique E et magnétique B aux sources de champs, la densité de charge $\rho$ et la densité de courant j
$\varepsilon_0$ est la permittivité du vide et c est la vitesse de la lumière

**rot E = -dB/dt**

**div E = $\rho/\varepsilon_0$**

**div B = 0**

**c² rot B = $j/\varepsilon_0$ + dE/dt**

## 3. Champs constants

### 3.1 Équations en champs constants

**rot E = 0**

**div E = $\rho/\varepsilon_0$**

**div B = 0**

**c² rot B = $j/\varepsilon_0$**

rot E = 0 donc E est un gradient. On pose **E = - grad Φ** **F** est le potentiel scalaire
div B = 0 donc B est un rotationnel. On pose **B = rotA** **A** est le potentiel vecteur

**3.2 Théorème de Gauss**

$\int E.dS = \int \text{div } E \, dV = \int \rho/\varepsilon_0 \, dV = 1/\varepsilon_0 \int \rho \, dV = Q/\varepsilon_0$

$\int \mathbf{E.dS} = \mathbf{Q/\varepsilon_0}$ L'intégrale de E.dS sur une surface S fermée est égale à la charge intérieure à S divisée par $\varepsilon_0$

Le théorème de Gauss permet de retrouver la formule de Coulomb pour une charge ponctuelle :

On intègre $\int E.dS$ sur une surface sphérique de rayon R, centrée sur la charge.

$\int E.dS = 4\pi R^2 E = Q/\varepsilon_0$

donc $\mathbf{E = Q/(4\pi e_0 R^2)}$

ou le champ E crée par un fil infini chargé uniformément d' une charge linéique $\lambda$ :

On intègre $\int E.dS$ sur une surface cylindrique de rayon R, de longueur l, centrée sur la charge. $\int E.dS = 2\pi Rl \, E = \lambda \, l/\varepsilon_0$

donc $\mathbf{E = \lambda/(2\pi e_0 R)}$

ou le champ E créé par une surface infinie chargée uniformément d' une charge surfacique $\sigma$ :

On intègre $\int E.dS$ sur une surface cylindrique de rayon R, coupée en son milieu par la plaque chargée. $\int E.dS = 2 \pi R^2 E = \pi R^2 \sigma \, l/\varepsilon_0$

donc $\mathbf{E = \sigma/(2\varepsilon_0)}$

Cette relation montre que le champ entre les plaques d'un condensateur vaut $\sigma/\varepsilon_0$ et qu'il est nul à l'extérieur

**3.3 Théorème d'Ampère:**

$\int B.dl = \int \text{rot } B \, dS = \int j/(c^2\varepsilon_0) \, dS = 1/c^2\varepsilon_0 \int j \, dS = I/(c^2\varepsilon_0) = \mu_0 I$

On pose $\mu_0 = 1/(c^2\varepsilon_0) = 4\pi.10^{-7}$ kg m $A^{-2}s^{-2}$

$\int \mathbf{B.dl} = \mathbf{\mu_0 I}$ L'intégrale de B.dl le long d'une ligne l fermée est égale à l'intensité du courant qui traverse la surface S délimitée par cette ligne.

Le théorème d'Ampère permet de trouver le champ B créé par un fil rectiligne.

On intègre $\int B.dl$ sur un cercle de rayon R, centrée sur le fil. $\int B.dl = 2\pi R \, B = \mu_0 I$

donc $\mathbf{B = \mu_0 I/(2\pi R)}$

ou le champ B créé par un solénoïde :

On intègre $\int B.dl$ sur un rectangle traversé par N spires. $\int B.dl = B \, l = \mu_0 N I$

donc $\mathbf{B = \mu_0 N I / l = n \, \mu_0 I}$ en posant $n = N/l$ n est le nombre de spires par mètre du solénoïde

### 3.4 Potentiel scalaire $\Phi$:

div $E = \rho/\varepsilon_0$ et $E = -$ grad $\Phi$

div (- grad $\Phi$) = $- \nabla^2\Phi = \rho/\varepsilon_0$

$\boldsymbol{\nabla^2\Phi = -\rho/\varepsilon_0}$ Équation de Poisson dont la solution est

$\boldsymbol{\Phi = 1/4\pi e_0 \int \rho/r\, dV}$ r est la distance où on calcule $\Phi$

### 3.5 Potentiel vecteur A

rot $B = \mu_0 j$ et $B$ = rot $A$

rot (rot A ) = grad(div A) - $\nabla^2 A = \mu_0 j$ On a le choix pour div A , on prend div A = 0

$\boldsymbol{\nabla^2 A = -\mu_0 j}$ Équation dont la solution est $\boldsymbol{A = \mu_0/4\pi \int j/r\, dV}$ r est la distance où on calcule A

### 3.6 Loi de Biot et Savart

B = rot A donc

$B = \mu_0/4\pi \int$ rot(j/r ) dV En développant les composantes de rot(j/r ) , on obtient

$\boldsymbol{B = \mu_0/4\pi \int j \wedge r/r^3\, dV}$

Pour un circuit linéaire, j dV devient I dl et

$\boldsymbol{B = \mu_0/4\pi \int I \wedge r/r^3\, dl}$

Application au calcul du champ à la distance z sur l'axe d'une bobine circulaire de N spires et de rayon R :

$B = B_z = \mu_0/4\pi$ NI $/r^2$ $2\pi R$ $\sin\theta$ $\sin\theta = R/r$ et $r = (R^2 + z^2)^{1/2}$

$B = \mu_0/2$ NI $R^2/r^3 = 2\pi.10^{-7}$ NI $R^2/(R^2 + z^2)^{3/2}$

Au centre de la bobine, z = 0 et $B = 2\pi.10^{-7}$ NI /R

## 4. Champs variables dans le temps

### 4.1 Conservation de la charge

$c^2$ rot $B = j/\varepsilon_0 + dE/dt$

div($c^2$ rot B ) = 0 = (div j)$/\varepsilon_0$ + d (div E) /dt et div $E = \rho/\varepsilon_0$

**div j + dρ/dt = 0** Cette équation rend compte de la conservation de la charge, elle indique que si la charge varie en un point, il doit y avoir un flux de charge qui l'accompagne. Aucune charge ne peut apparaître en un point sans qu'on l'y ait amenée.

### 4.2 Expression du champ électrique E

rot E = -dB/dt et B = rot A

rot E = - rot (dA/dt) ou rot( E + dA/dt ) = 0. Si rot( E + dA/dt ) = 0, c'est que E + dA/dt est un gradient donc

E + dA/dt = - grad $\Phi$ ( on prend - grad $\Phi$ pour la compatibilité avec les champs constants )

**E = - dA/dt - grad Φ**

### 4.3 Potentiel vecteur A

$c^2$ rot B = $j/\varepsilon_0$ + dE/dt et B = rot A

$c^2$ rot (rot A ) = grad(div A) - $\nabla^2 A$ = $j/\varepsilon_0$ + dE/dt et E = - dA/dt - grad $\Phi$

grad(div A) - $\nabla^2 A$ = $j/\varepsilon_0$ - $d^2A/dt^2$ - grad( $d\Phi/dt$ )

grad(div A + $d\Phi/dt$ ) - $\nabla^2 A$ = $j/\varepsilon_0$ - $d^2A/dt^2$ On choisit A tel que **div A + dΦ/dt = 0**

( Jauge de Lorentz )

- $\nabla^2 A$ = $j/\varepsilon_0$ - $d^2A/dt^2$

**$\nabla^2 A - d^2A/dt^2 = - j/\varepsilon_0$**

Équation dont la solution est

**$A = \mu_0/4\pi \int j(t - r/c) /r\, dV$** r est la distance où on calcule A au temps t.

### 4.4 Potentiel scalaire Φ

div E = $\rho/\varepsilon_0$ et E = - dA/dt - grad $\Phi$ et div A = - $d\Phi/dt$ ( Jauge de Lorentz )

div(- dA/dt - grad $\Phi$) = - d(divA)/dt - div(grad $\Phi$) = $d^2\Phi/dt^2$ - $\nabla^2\Phi$ donc

**$\nabla^2\Phi - d^2\Phi/dt^2 = - \rho/\varepsilon_0$**

Équation dont la solution est

**$\Phi = 1/4\pi e_0 \int \rho(t - r/c) /r\, dV$** r est la distance où on calcule A au temps t.

### 4.5 Loi de Faraday - induction électromagnétique

rot E = -dB/dt

$\int$**E.dl** = $\int$rot **E dS** = $\int$-**dB**/dt **.** d$\underline{S}$ = - d($\int$**B.dS** )/dt = - $d\varphi/dt$ $\varphi = \int$**B.dS** est le flux de B à travers la surface S qui s'appuie sur la courbe l.

D'autre part, $\int$**E.dl** = e est la force électromotrice induite donc on obtient :

**e = - dφ/dt** ( Loi de Faraday )

# 5. Les ondes électromagnétiques

Quand on est loin des sources, j = 0 et ρ = 0, les équations de Maxwell donnent :

**rot E = -dB/dt**

**div E = 0**

**div B = 0**

**$c^2$ rot B = dE/dt**

rot(rot E ) = grad(div E ) - $\nabla^2 E$ = - d(rotB)/dt et rot B = $1/c^2$ dE/dt. Comme div E =0 , on a :

**$\nabla^2 E = 1/c^2\, d^2E/dt^2$**

C'est l'équation générale d'une onde qui se propage à la vitesse c

rot(rot B ) = grad(div B ) - $\nabla^2 B$ = $1/c^2$ d(rotE)/dt et rot E = - dB/dt. Comme div B =0 , on a :

**$\nabla^2 B = 1/c^2\, d^2B/dt^2$**

C'est l'équation générale d'une onde qui se propage à la vitesse c

Supposons une onde plane qui se propage selon l'axe des x et que E soit dans le plan yOz.
Dans une onde plane se propageant le long de Ox, aucune composante ne dépend de y ou de z
div E = $dE_x/dx + dE_y/dy + dE_z/dz = 0$, Ez = 0 donc $dE_z/dz = 0$, de plus $E_y$ ne dépend pas de y donc $dE_y/dy = 0$, il en résulte que $dE_x/dx = 0$.
$E_x$ ne dépend pas de x, donc $E_x = 0$ ( En toute rigueur $E_x$ = constante, mais un champ constant n'est pas une onde )
Le champ E est perpendiculaire au déplacement. $E = E_y$
rot E = ( $- dE_y/dz$ , 0 , $dE_y/dx$ ) E ne dépend pas plus de z que de y donc $dE_y/dz = 0$
rot E = ( 0 , 0 , $dE_y/dx$ ) donc $0 = -dB_x/dt$, $0 = -dB_y/dt$ et $dE_y/dx = dB_y/dt$

div B = $dB_x/dx + dB_y/dy + dB_z/dz = 0$ $B_y$ ne dépend pas de y donc $dB_y/dy = 0$ et $B_z$ ne dépend pas de z donc $dB_z/dz = 0$, il en résulte que $dB_x/dx = 0$.
$B_x$ ne dépend pas de x, donc $B_x = 0$ ( En toute rigueur $B_x$ = constante, mais un champ constant n'est pas une onde )
Le champ B est perpendiculaire au déplacement.
rot B = ( 0, $- dB_z/dx$, $dB_y/dx$ ) car $B_y$ ne dépend pas de z et $B_z$ ne dépend pas de y donc
$0 = dE_x/dt$ ( normal puisque $E_x = 0$ ), $- dB_z/dx = dE_y/dt$ et $dB_y/dx = dE_z/dt = 0$ car $E_z = 0$.
$dB_y/dx = 0$ donc $B_y$ ne dépend pas de x, donc $B_y = 0$ ( En toute rigueur $B_y$ = constante, mais un champ constant n'est pas une onde )
En conclusion, on voit que $B = B_z$ donc **B** est perpendiculaire au déplacement et perpendiculaire à **E**

**Les ondes électromagnétiques sont constituées de deux champs E et B perpendiculaires au déplacement et perpendiculaires entre eux.**
**Elles se propagent à la vitesse $c = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)^{1/2}$ = 299792458 m/s**

**Remarque** : D'après les équations de Maxwell, $c^2 = 1/(\varepsilon_0 \mu_0)$. $\varepsilon_0$ et $\mu_0$ sont deux constantes universelles qui ne dépendent pas du repère dans lequel on les mesure, donc c ne doit pas en dépendre non plus. Mais c est une vitesse et d'après la cinétique galiléenne, une vitesse dépend du repère. Ce fait a beaucoup perturbé les physiciens de la fin du dix-neuvième siècle. On a d'abord pensé que la théorie de Maxwell était fausse, mais plus on l'étudiait et plus elle semblait tout à fait correcte... On a essayé des tas d'hypothèses pour essayer de concilier Maxwell et Galilée, mais c'était toujours bancal. C'est Einstein qui a résolu le problème en élaborant sa théorie de la relativité restreinte.

# 6. Électromagnétisme et relativité

## 6.1 Le quadrivecteur A,Φ

A et Φ comme j et ρ forment un quadrivecteur, le quadrivecteur ( A, cΦ )
On peut donc calculer les potentiels d'une charge en mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v en utilisant la transformation de Lorentz

$A'_x = (A_x - v\,\Phi)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$
$A'_y = A_y$
$A'_z = A_z$
$\Phi' = (\Phi - v\,A_x/c^2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$

### 6.2 Potentiels d'une charge en mouvement rectiligne uniforme

On prend une charge q se déplaçant à la vitesse v sur l'axe Ox. On utilise un repère O'x'y'z' se déplaçant à la même vitesse (q se trouve en O').
Dans le repère R', la charge est immobile donc
$\Phi' = q/(4\pi\varepsilon_0\, r') = q/(4\pi\varepsilon_0\, ( x'^2 + y'^2 + z'^2 )^{1/2} )$ et $A' = 0$
On en déduit $\Phi$ dans le repère R en inversant la transformation de Lorentz :
$\Phi = (\Phi' + v\, A'_x /c^2)/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = \Phi' /(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ puisque $A'_x = 0$
$\Phi = q/(4\pi\varepsilon_0\, (1 - v^2/c^2)^{1/2}( x'^2 + y'^2 + z'^2 )^{1/2} )$
On exprime ensuite x', y', z' en fonction de x, y, z par la transformation de Lorentz
$x' = (x - v\, t)/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ $y' = y$ et $z' = z$
$\Phi = q/(4\pi\varepsilon_0\, (1 - v^2/c^2)^{1/2}((x - v\, t)^2/(1 - v^2/c^2) + y^2 + z^2 )^{1/2} )$
$\boldsymbol{\Phi = q/(4\pi\varepsilon_0\, ((x - v\, t )^2 + ( y^2 + z^2) (1 - v^2/c^2))^{1/2} )}$ **et** $\boldsymbol{A_x = v\, \Phi'/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = v\, \Phi}$

Ces expressions furent trouvées par un calcul direct dans le repère R à partir des équations de Maxwell ( C'est un calcul assez délicat qui doit être mené avec grand soin ), par Liénart et Wiechert. C'est en étudiant ces équations que Lorentz en déduisit ses équations de transformation. Il proposa alors de les utiliser pour changer de repère en électromagnétisme et d'utiliser les transformations galiléennes pour les changements de repère en mécanique... Un sacré micmac totalement ad hoc puisqu'il ne donnait aucune justification à tout cela. Einstein démêla ce sac de nœuds théorique en affirmant que la transformation de Lorentz était universelle, que c'était ainsi que fonctionnait l'Univers et qu'il fallait donc l'appliquer aussi à la mécanique. C'était le début de la relativité restreinte.