Animation

Double cône de l'abbé Nollet

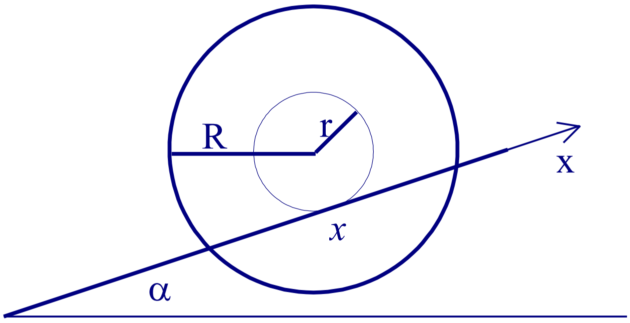
Animation

Au XVIII^{ème} siècle, l'abbé Nollet, précurseur de la pédagogie expérimentale de la physique, inventa ce gadget amusant pour montrer qu'un objet pouvait escalader une rampe si cette escalade lui permettait d'abaisser son centre de gravité. En effet, comme les bords s'écartent, la distance du centre de gravité par rapport au point de roulement diminue et si la pente est assez faible, il peut aussi s'abaisser par rapport au sol.

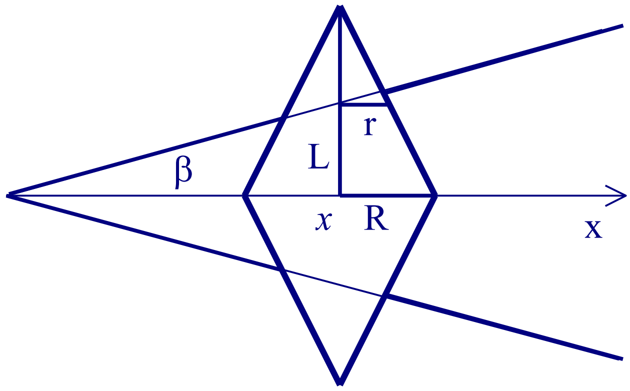
1. Schémas

Vue de profil

Le mobile roule sans glisser sur son support



Vue de dessus



x Abscisse du centre de gravité
R Rayon du bicône
r Rayon de roulement du bicône
L Longueur d'un cône
M Masse du mobile
J Moment d'inertie du mobile $J = 3MR^2/10$

ω Vitesse angulaire
v Vitesse linéaire $v = dx/dt = x' = r\,\omega$
α Inclinaison de la rampe
β Ecartement des bords/Ox
$r = R(\,L - \tan\beta\, x\,)/L = R(\,1 - \tan\beta\, x/L\,)$
$r' = dr/dt = -\,R\tan\beta\, x'/L = -\,R\tan\beta\, v/L$

2. Etude du mouvement

Energie mécanique : $E_m = E_c + E_p = cste$ (On néglige les frottements)
E_c est la somme de l'énergie cinétique de rotation et de l'énergie cinétique de translation
$E_c = ½\, J\,\omega^2 + ½\, Mv^2$ avec $J = 0{,}3MR^2$ pour le double cône
$E_p = Mg\, z_G = Mg\,(\,x\sin\alpha + r\cos\alpha\,)$
donc $½\,(J/r^2 + M)\, v^2 + Mg\,(\,x\sin\alpha + r\cos\alpha\,) = E_m$ ($\omega = v/r$)

On dérive l'expression par rapport au temps :
$(J/r^2 + M)\, v\, v' - v^2\, J\, r'/r^3 + Mg\,(\,v\sin\alpha + r'\cos\alpha\,) = 0$
$r = R(1 - \tan\beta\, x/L)$ donc $r' = -\,R\tan\beta\, v/L$
$(J/r^2 + M)\, v\, v' + v^3 J\, R\tan\beta/(Lr^3) + M\, g\, v\,(\,\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta\, R/L\,) = 0$

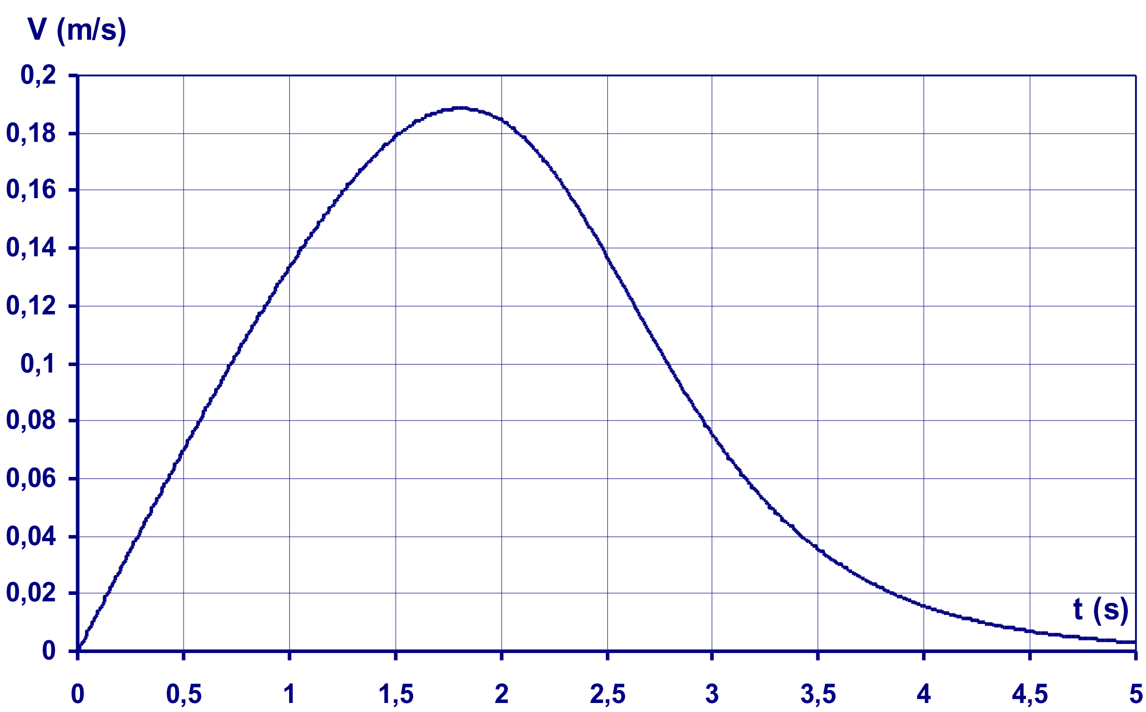
$$\mathbf{v' = a = (\,g\,(\,R\cos\alpha\tan\beta/L - \sin\alpha\,) - 0{,}3\, R^3\tan\beta\, v^2/(Lr^3))/(0{,}3R^2/r^2 + 1)}$$

3. Etude de la solution de l'équation

3.1 Etude qualitative

Au départ, v = 0 donc
$a = g\,(R \cos\alpha \tan\beta/L - \sin\alpha\ )$
Pour que le mobile "escalade la pente", il faut $a > 0$ donc $\tan\alpha < R \tan\beta/L$
Quand v augmente, a diminue jusqu'à devenir négatif, ce qui fait diminuer la vitesse, donc la vitesse commence par augmenter tant que :
$v^2 < 10\, g(R \cos\alpha \tan\beta - L \sin\alpha\ )(L - \tan\beta\, x\ )^3/(3L^3 \tan\beta)$
puis elle diminue pour tendre vers zéro quand x tend vers $L/\tan\beta$ ce qui correspond au moment où la pointe du cône se trouve sur le support, On a alors r = 0.

3.2 Étude numérique de v = f(t)

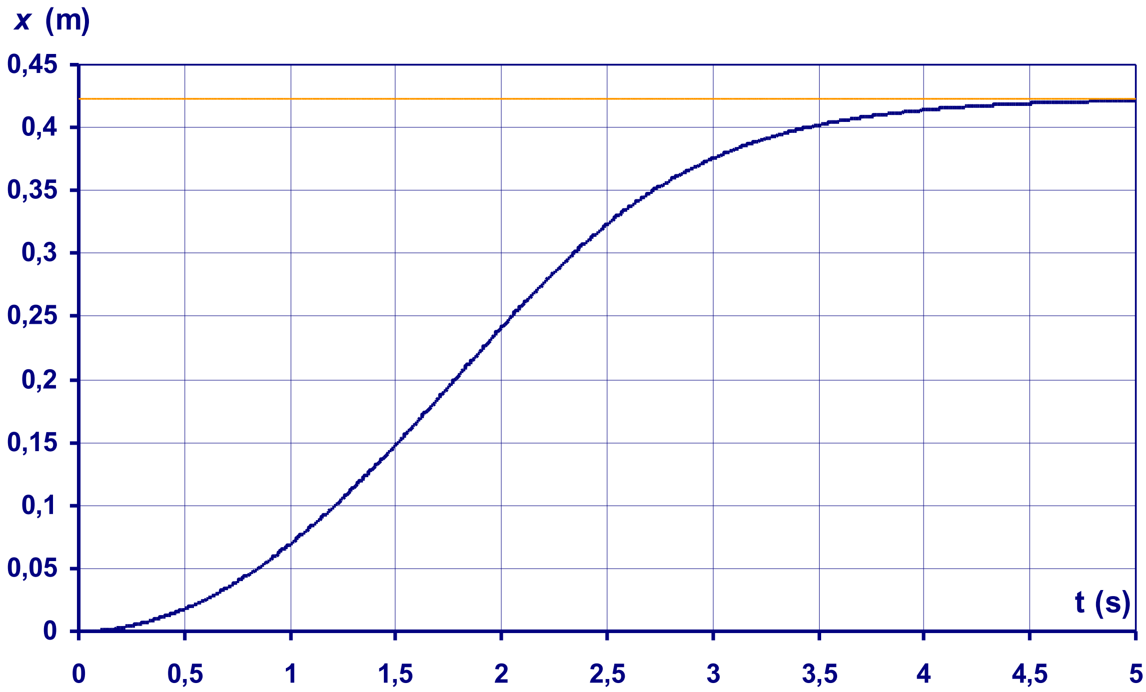


R = 6 cm　　　　　　$\sin\alpha = 0{,}122$　(7°)

L = 9 cm　　　　　　$\tan\beta = 0{,}2125$　(12 °)

A t = 1,81 s : a = 0　　$x = 0{,}205$ m　　$v = v_{max} = 0{,}188$ m/s

3.3 Étude numérique de x = f(t)



R = 6 cm

L = 9 cm

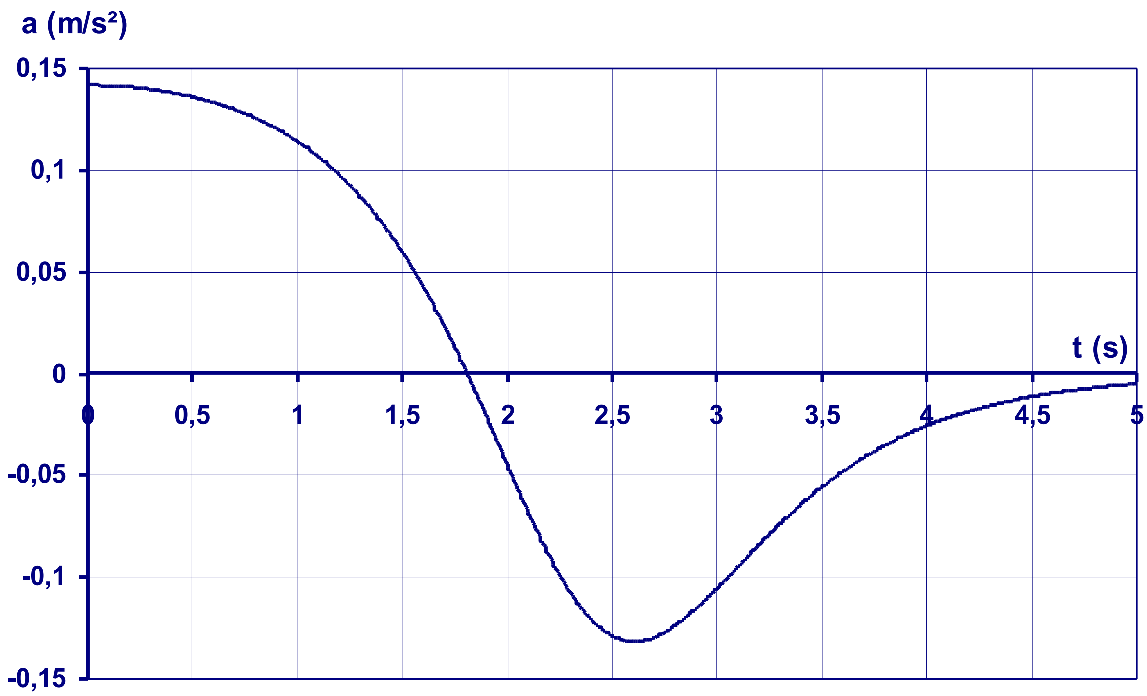
x_{max} = L/tanβ = 0,423 m

sinα = 0,122 (7°)

tanβ = 0,2125 (12 °)

z_i = R = 6 cm $z_f = x_{max}\sin\alpha$ = 5,16 cm

3.4 Étude numérique de a = f(t)



R = 6 cm

L = 9 cm

sinα = 0,122 (7°)

tanβ = 0,2125 (12 °)