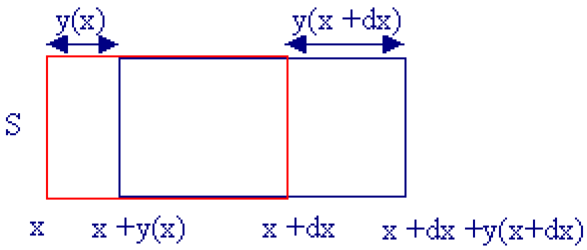
Animation

# Théorie du son

par Gilbert Gastebois

Animation

## 1. Schéma




Au passage d'une onde sonore plane allant dans la direction des x, une tranche de matériau de section S et de longueur dx se déplace et se déforme. Son déplacement est $y_{(x)}$ au point x et $y_{(x+dx)}$ au point x+dx.

Son volume varie de $dV = V - V_0$

$V = S(x + dx + y_{(x+dx)}) - (x + y_{(x)})$ $\quad V_0 = S\,dx$

$dV = S(dx + y_{(x+dx)} - y_{(x)}) - Sdx$

$dV = S(y_{(x+dx)} - y_{(x)}) = S\,\delta y/\delta x\,dx = V_0\,\delta y/\delta x$

## 2. Équation de l'onde plane

### 2.1. Relation entre la pression et la masse volumique

La pression d'équilibre est $P_0$. La pression P au passage de l'onde varie de $p_e$, on a ainsi

$P = P_0 + p_e \quad ( p_e << P_0)$

La masse volumique ρ du matériau varie de $\rho_e$, $\rho = \rho_0 + \rho_e \quad ( \rho_e << \rho_0)$

P dépend de ρ, on peut donc écrire $P = f(\rho) = f(\rho_0 + \rho_e) = f(\rho_0) + \rho_e f'(\rho_0)$

( Développement de Taylor au 1$^{er}$ degré )

$P = P_0 + \rho_e f'(\rho_0) = P_0 + \rho_e (\delta P/\delta\rho)_0 = P_0 + k_0\,\rho_e \quad$ ( On note $(\delta P/\delta\rho)_0 = k_0$)

$P = P_0 + p_e = P_0 + k_0\,\rho_e$

$\mathbf{p_e = k_0\,\rho_e}$

### 2.2 Relation entre la masse volumique et le déplacement y

La masse m de la tranche de matériau ne varie pas donc $m = \rho_0 V_0 = (\rho_0 + \rho_e)(V_0 + dV) = \rho_0 V_0 + \rho_0\,dV + \rho_e V_0$ ( on néglige $\rho_e\,dV$ )

donc $\rho_0\,dV + \rho_e V_0 = 0$ et $\rho_e = - \rho_0\,dV/V_0$ or $dV = V_0\,\delta y/\delta x$

donc $\mathbf{\rho_e = - \rho_0\,\delta y/\delta x}$

### 2.3 Équation différentielle de l'onde

$2^{ème}$ loi de Newton : $m\, a_x = P_{(x)} S - P_{(x+dx)} S$ ( P S est la force appliquée par la pression externe sur la tranche de matériau )

$m\, \delta^2y/\delta t^2 = P_{(x)} S - P_{(x+dx)} S = S (P_0 + p_{e(x)} - ( P_0 + p_{e(x+dx)})) = S ( p_{e(x)} - p_{e(x+dx)} ) = - S\, \delta p_e/\delta x\, dx$

$m = \rho_0 S\, dx$ donc : $\rho_0 S\, dx\, \delta^2y/\delta t^2 = - S\, \delta p_e/\delta x\, dx$ et

$\rho_0\, \delta^2y/\delta t^2 = - \delta p_e/\delta x$

$p_e = k_0\, \rho_e$ donc $\rho_0\, \delta^2y/\delta t^2 = - k_0\, \delta\rho_e/\delta x = k_0\, \rho_0\, \delta^2y/\delta x^2$ puisque $\rho_e = - \rho_0\, \delta y/\delta x$

$\boldsymbol{\delta^2y/\delta t^2 = k_0\, \delta^2y/\delta x^2}$

De la forme : $\boldsymbol{\delta^2y/\delta x^2 = 1/c^2\, \delta^2y/\delta t^2}$ Ceci est l'équation différentielle d'une onde plane de célérité c

### 2.4 Solution de l'équation

$\delta^2y/\delta x^2 = 1/c^2\, \delta^2y/\delta t^2$

On pose $y = a\, f(t - x/c)$ qu'on reporte dans l'équation différentielle

$\delta y/\delta t = a\, f'(t-x/c)$ et $\delta^2y/\delta t^2 = a\, f''(t-x/c)$

$\delta y/\delta x = - a/c\, f'(t-x/c)$ et

$\delta^2y/\delta x^2 = a/c^2\, f''(t-x/c) = 1/c^2\, \delta^2y/\delta t^2$ donc la solution choisie vérifie bien l'équation différentielle.

Pour $\delta^2y/\delta t^2 = k_0\, \delta^2y/\delta x^2$ on a $c^2 = k_0 = (\delta P/\delta\rho)_0$

La fonction $y = b\, g(t+x/c)$ est également solution avec la même condition sur c, elle représente une onde se propageant vers les x négatifs.

Par conséquent la solution générale de l'équation est :

$$\boldsymbol{y = a\, f(t - x/c) + b\, g(t + x/c) \quad \text{avec } c^2 = (\delta P/\delta\rho)_0}$$

### 2.5 Équation en trois dimensions

Si on applique le même raisonnement à un déplacement u dans les trois dimensions on obtient :

$\delta^2u/\delta t^2 = c^2 ( \delta^2u/\delta x^2 + \delta^2u/\delta y^2 + \delta^2u/\delta z^2) = c^2\, \Delta^2 u$ ( $\Delta^2$ est le Laplacien )

La solution de cette équation est $u = a\, f( t - \mathbf{c.r} /c^2)$.

Vérification à 2 dimensions pour une onde se propageant dans le plan Oxy avec un angle $\theta$ par rapport à Ox :

$\mathbf{c}$ ( c cosθ , c sinθ ) et $\mathbf{r}$ ( x, y ). $\mathbf{r.c} = c\, x \cos\theta + c\, y \sin\theta$

$\delta^2u/\delta t^2 = a\, f''(t - \mathbf{c.r} /c^2)$ $\delta^2u/\delta x^2 = a/c^2 \cos^2\theta\, f''(t - \mathbf{c.r} /c^2)$ $\delta^2u/\delta y^2 = a/c^2 \sin^2\theta\, f''(t - \mathbf{c.r} /c^2)$ $\delta^2u/\delta z^2 = 0$

$\delta^2u/\delta x^2 + \delta^2u/\delta y^2 + \delta^2u/\delta z^2 = a/c^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, f''(t - \mathbf{c.r} /c) = 1/c^2\, \delta^2u/\delta t^2$, donc la solution choisie vérifie bien l'équation différentielle

$$\boldsymbol{\Delta u = 1/c^2\, \delta^2u/ \delta t^2 \iff u = a\, f( t - c.r /c^2) + b\, g( t + c.r /c^2)}$$

# 3. Équation de l'onde sphérique

On sait que les ondes ne sont pas forcément planes, elles sont même pratiquement toujours sphériques puisque les sources sont pratiquement toujours quasi-ponctuelles.
Pour étudier une onde sphérique, il vaut mieux passer en coordonnées sphériques. Le système étant à symétrie sphérique, les dérivées par rapport à $\theta$ et $\varphi$ sont nulles, il reste la dérivée par rapport à r, on a alors :
$\Delta u = 1/r\ \delta^2(ru)/\delta r^2$ ( On peut vérifier que cette équation redonne bien le Laplacien cartésien, c'est assez fastidieux... )
$1/r\ \delta^2(ru)/\delta r^2 = 1/c^2\ \delta^2 u/\delta t^2$ ou $\delta^2(ru)/\delta r^2 = r/c^2\ \delta^2 u/\delta t^2$
r ne dépendant pas de t, on peut l'intégrer à la dérivée $\delta^2 u/\delta t^2$, on a alors
$\delta^2(ru)/\delta r^2 = 1/c^2\ \delta^2(ru)/\delta t^2$ dont la solution est :
$r\,u = a\,f(t - \mathbf{c}.\mathbf{r}/c^2)$ ( La solution $b\,g(t + \mathbf{c}.\mathbf{r}/c^2)$ n'est pas physique, elle correspondrait à une onde qui se propagerait vers la source )

**$u = a/r\ f(t - \mathbf{c}.\mathbf{r}/c^2)$**

L'amplitude de l'onde diminue en 1/r donc l'intensité proportionnelle au carré de l'amplitude diminue en $1/r^2$

# 4. Célérité du son dans un gaz

$c^2 = (\delta P/\delta\rho)_0$
L'air au passage est très rapidement comprimé, ce qui augmente sa température, puis détendu ce qui le refroidit. Ces variations étant très rapides, la chaleur n'a pas le temps de diffuser et ainsi la compression et la détente sont adiabatiques ce qui implique l'équation adiabatique des gaz :
$PV^\gamma$ = constante
$\rho = m/V$ donc $P(m/\rho)^\gamma$ = constante et ainsi $P/\rho^\gamma = k$ ( cste ) donc $P = k\,\rho^\gamma$
$(\delta P/\delta\rho)_0 = \gamma\,k\,\rho_0^{\gamma-1} = \gamma P_0/\rho_0$
L'équation des gaz parfaits nous donne : $P_0 V_0 = n\,RT = m/M\ RT$
( M masse molaire du gaz et R = 8,32 J/K/mol)
donc $P_0 = m/V_0\ RT/M = \rho_0\,RT/M$ et $\gamma P_0/\rho_0 = \gamma RT/M = c^2$

**$c^2 = \gamma RT/M$ ( Ex : Pour l'air, $\gamma = 1{,}4$ $M = 29.10^{-3}$ kg/mol ce qui donne c = 343 m/s à 20°C ( 293K ))**

# 5. Célérité du son dans un liquide ou un solide

Dans un liquide ou un solide de volume V que l'on comprime d'une surpression $\delta P$, le volume diminue de $\delta V$ ( $\delta V<0$) qui est proportionnel à V et à $\delta P$, on a ainsi
$\delta V = -\chi\,V\,\delta P$ ( $\chi$ est la compressibilité du matériau )
On a donc $\delta V = -\chi\,V\,\delta P$
$m = \rho V$ = constante donc $0 = \rho\,\delta V + V\delta\rho$ et $\delta V = -V\delta\rho/\rho$
donc $\delta V = -\chi\,V\,\delta P = -V\,\delta\rho/\rho$ et $(\delta P/\delta\rho)_0 = 1/(\chi\,\rho_0)$
$c^2 = (\delta P/\delta\rho)_0 = 1/(\chi\,\rho_0)$

**$c^2 = 1/(\chi\,\rho_0) = K/\rho_0$ $K = 1/\chi$ est la rigidité du milieu en Pa**

**( Ex : Pour l'eau, $K = 2{,}25.10^9$ Pa, ce qui donne c = 1500 m/s)**