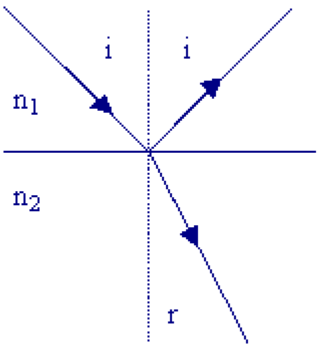
Optique géométrique

par Gilbert Gastebois

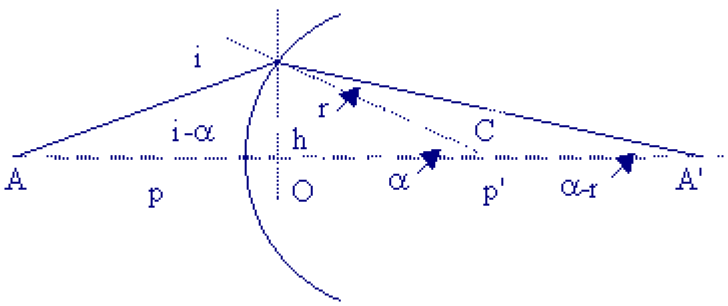
1. La réfraction



Loi de Descartes : $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ (cf : réfraction)

2. Les lentilles minces dans les conditions de Gauss

2.1 Schéma du dioptre



$p = OA$ ($p < 0$)

$p' = OA'$ ($p' > 0$)

$R = OC$ ($R > 0$)

2.2 relation du dioptre

$\sin \alpha = h/R$
$n_1 \sin i = n_2 \sin r$
$\tan (i - \alpha) = - h/p$ ($p < 0$)
$\tan (\alpha - r) = h/p'$

Approximations de Gauss : les angles sont petits donc h est petit et O est très proche du dioptre (rayons paraxiaux).
En pratique on impose $h<R/10$

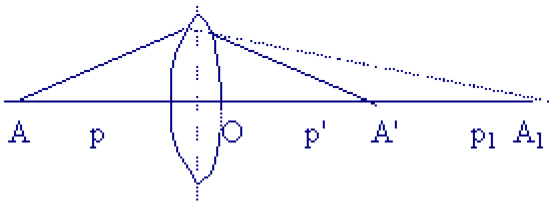
On a alors $\sin \varepsilon = \tan \varepsilon = \varepsilon$
donc
$\alpha = h/R$
$n_1 i = n_2 r$
$i - \alpha = - h/p$
$\alpha - r = h/p'$

donc
$i = \alpha - h/p = h/R - h/p$
$r = \alpha - h/p' = h/R - h/p'$
$n_1 i = n_2 r = n_1 (h/R - h/p) = n_2 (h/R - h/p')$
donc $n_2 h/p' - n_1 h/p = (n_2 - n_1)h/R$ donc

$n_2 /p' - n_1/p = (n_2 - n_1) /R$ Relation de conjugaison des dioptres.

La relation ne dépend pas de h donc tous les rayons partant de A convergent en A'. Le dioptre est donc stigmatique dans les conditions de Gauss.

2.3 Relation des lentilles minces



Lentille mince : O est très proche des surfaces des deux dioptres.
Air : indice = 1
Lentille: indice = n
1er dioptre ($n_1 = 1, n_2 = n$) :

$n /p_1 = (n -1) /R_1 + 1/p$ ($R_1 > 0$)

2ème dioptre ($n_1 = n, n_2 = 1$) :

$1 /p' = (1 - n) / R_2 + n/p_1$ ($R_2 < 0$)

donc $1/p' = (n - 1) /R_1 - (n - 1) /R_2 + 1 /p$

$1/p' - 1 /p = (n - 1)(1 /R_1 - 1 /R_2) = 1/f' = C$

Loi de Descartes pour les lentilles minces

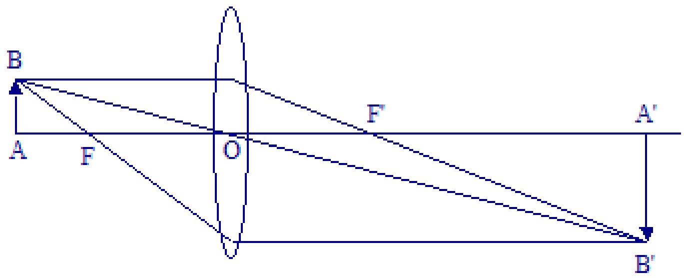
2.4 Distance focale

La distance focale f ' = OF ' est la distance entre le centre de la lentille et l'endroit où se forme l'image d'un objet placé à l'infini
Si p est infini, $1 /p' = (n - 1)(1 /R_1 - 1 /R_2) = 1/f' = C$

$1/f' = C = (n - 1)(1 /R_1 - 1 /R_2)$

Lentilles convexes : $R_1 > 0$ et $R_2 < 0$ ou $1/R_1 > 1/R_2$ donc $f' > 0$ et $C = 1/f' > 0$
(F ' à droite du miroir)
Lentilles concaves : $R_1 < 0$ et $R_2 > 0$ ou $1 /R_1 < 1 /R_2$ donc $f' < 0$ et $C = 1/f' < 0$
(F ' à gauche du miroir)

2.5 Formule de conjugaison de Newton



$B'A'/AB = FO/AF$
$B'A'/AB = F'A'/OF'$
$FO/AF = F'A'/OF'$
$FA\ F'A' = OF\ OF' = - f^2$

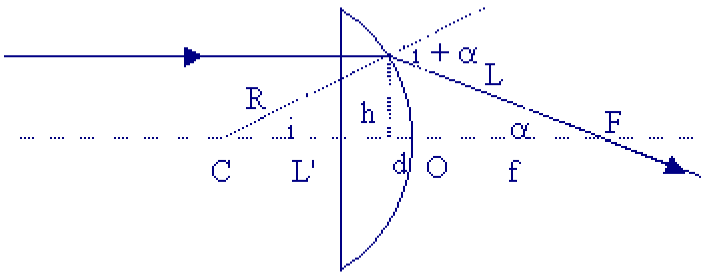
$FA\ F'A' = - f^2$ Loi de Newton pour les lentilles minces

$B'A'/AB = OA'/AO$

$\gamma = A'B'/AB = OA'/OA = p'/p$ Formule du grandissement

2.6 Les lentilles sphériques hors conditions de Gauss

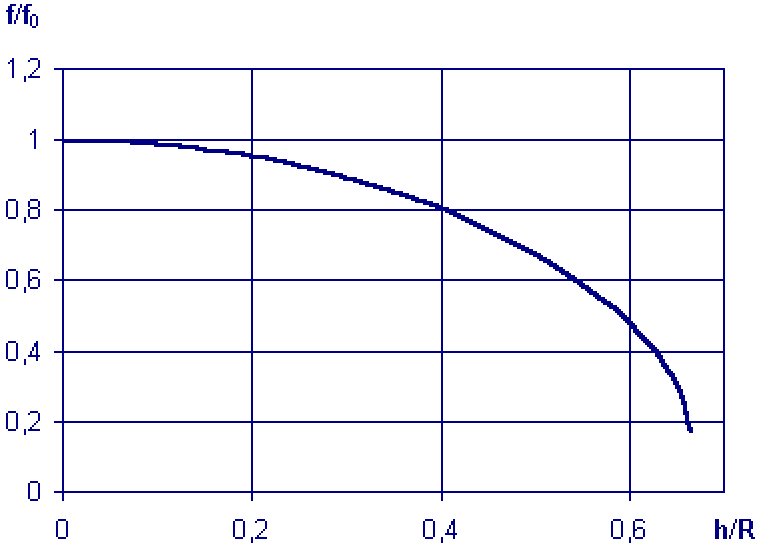
On étudie la distance focale f = OF d'une lentille plan-convexe.



$f_0 = (n-1)R$

$OF = f$
$L' = R \cos i = (R^2 - h^2)^{1/2}$
$d = R - L' = R - (R^2 - h^2)^{1/2}$
$f' = f + d = L \cos \alpha$
$f' = f + R - (R^2 - h^2)^{1/2}$
$L = (f'^2 + h^2)^{1/2}$

$n \sin i = \sin(i + \alpha) = \sin i \cos \alpha + \sin\alpha \cos i$
$n = \cos\alpha + \sin\alpha/\tan i = f'/L + h/L \quad L'/h = f'/L + L'/L = (f' + L')/L$
$L = (f' + L')/n$ donc $L^2 = (f'^2 + L'^2 + 2 f'L')/n^2$ donc $f'^2 + h^2 = (f'^2 + L'^2 + 2 f'L')/n^2$
$(n^2 -1) f'^2 + 2 f'L' + n^2h^2 - L'^2 = 0$
$f' = (L' + (L'^2 - (n^2 -1) (n^2h^2 - L'^2))^{1/2})/(n^2 -1)$
(L'autre signe n'a pas de signification physique)
$f' = (L' + (L'^2 - n^4h^2 + n^2L'^2 - L'^2 + n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1)$
$f' = (L' + (- n^4h^2 + n^2L'^2 + n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1) = (L' + n (R^2 - n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1) =$
$((R^2 - h^2)^{1/2} + n (R^2 - n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1)$
$f + R - (R^2 - h^2)^{1/2} = ((R^2 - h^2)^{1/2} + n (R^2 - n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1)$
$f = ((R^2 - h^2)^{1/2} + n (R^2 - n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1) - R + (R^2 - h^2)^{1/2} = (n^2(R^2 - h^2)^{1/2} +$
$n (R^2 - n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1) - R$
$f = R (n(n(1 - h^2/R^2)^{1/2} + (1 - n^2h^2/R^2)^{1/2})/(n^2 -1) - 1)$
$f = f_0 (n(n(1 - h^2/R^2)^{1/2} + (1 - n^2h^2/R^2)^{1/2})/(n + 1) - n + 1)$
($f_0 = R/(n-1)$ est la distance focale de la lentille)



Courbe $f/f_0 = f(h/R)$ pour $n = 1{,}5$

$f_0 = R/(n-1)$

f est indépendant de h pour $h < 0{,}1R$

Pour $h/R = 1/n = 0{,}667$,
$f_m = 0{,}171\ f_0$

Valeur limite de f

f n'existe que si $R^2 - n^2h^2 >= 0$ donc si $h/R <= 1/n$ ou $\sin i <= 1/n$
$\sin i = 1/n$ correspond à l'angle limite de sortie du rayon de la lentille où $i + \alpha = 90°$
Si $h/R = 1/n$, on a alors $f_m = R(n^2(1 - 1/n^2)^{1/2})/(n^2 -1) - R = R\ n/(n^2 -1)^{1/2} - R$

$$\mathbf{f_m = R (n/(n^2 -1)^{1/2} - 1) = f_0 (n(n-1)^{1/2}/(n+1)^{1/2} - n + 1)}$$

($f_0 = R/(n-1)$ est la distance focale de la lentille)

Valeur de f pour les petites valeurs de h ($h^2/R^2 << 1$)

$f = (n^2(R^2 - h^2)^{1/2} + n (R^2 - n^2h^2)^{1/2})/(n^2 -1) - R = (n^2R(1 - h^2/R^2)^{1/2} +$
$nR(1 - n^2h^2/R^2)^{1/2})/(n^2 -1) - R$
$f = (n^2R(1 - h^2/2R^2) + nR(1 - n^2h^2/2R^2))/(n^2 -1) - R = (n^2R - n^2h^2/2R + nR - n^3h^2/2R)/(n^2 -1) - R$
$f = (n^2R + nR - n^2(n + 1)h^2/2R - n^2R + R)/(n^2 -1) = (n + 1)R/(n^2 -1) - n^2(n + 1)h^2/2R /(n^2 -1) =$
$R/(n -1) - n^2h^2/2R /(n -1)$

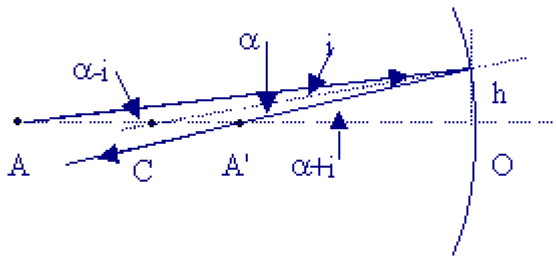
$$\mathbf{f = R/(n -1) (1 - n^2h^2/2R^2) = f_0 (1 - n^2h^2/2R^2)}$$

($f_0 = R/(n-1)$ est la distance focale de la lentille)

Pour que f soit supérieur à 99% de f_0 (Conditions de Gauss) il faut $n^2h^2/2R^2 < 0{,}01$ donc
$h^2/R^2 < 0{,}02/n^2 = 0{,}01$ donc $h/R < 0{,}1$
On est dans les conditions de Gauss si le rayon de la zone utile (du diaphragme) est inférieur à R/10 ou si le diamètre est inférieur à $f_0/10$

3. Les miroirs sphériques dans les conditions de Gauss

3.1 Schéma du miroir



$p = OA \quad (p < 0)$

$p' = OA' \quad (p' < 0)$

$R = OC \quad (R < 0)$

3.2 relation des miroirs sphériques

$\sin \alpha = - h/R \quad (R < 0)$
$\tan (\alpha - i) = - h/p \quad (p < 0)$
$\tan (\alpha + i) = - h/p' \quad (p' < 0)$

Approximations de Gauss : les angles sont petits donc h est petit et O est très proche de la surface du miroir (rayons paraxiaux)
En pratique on impose $h<R/10$

On a alors $\sin \varepsilon = \tan \varepsilon = \varepsilon$
donc
$\alpha = - h/R$
$\alpha - i = - h/p$
$\alpha + i = - h/p'$
donc
$2 \alpha = - h/p - h/p' = - 2 h/R$ donc

$1/p' + 1/p = 2/R = 1/f' = C$ **Loi de Descartes pour les miroirs sphériques**

La relation ne dépend pas de h donc tous les rayons partant de A convergent en A'. Le miroir est donc stigmatique dans les conditions de Gauss.

3.3 distance focale

La distance focale $f' = OF'$ est la distance entre le centre du miroir et l'endroit où se forme l'image d'un objet placé à l'infini
Si p est infini, $1/p' = 2/R = 1/f' = C$

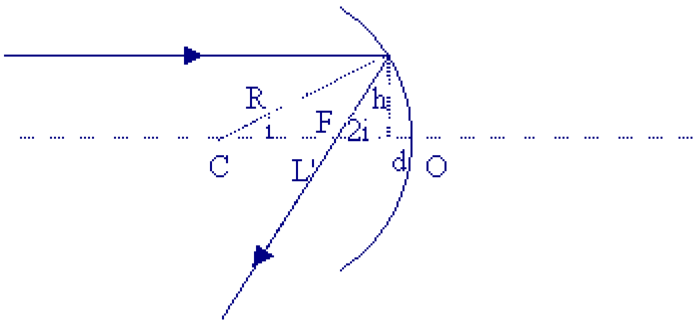
$OF' = f' = 1/C = R/2$

Miroir concave : $R < 0$ donc $C < 0$ (F ' à gauche du miroir)

Lentilles convexe : $R > 0$ donc $C > 0$ (F ' à droite du miroir)

3.4 Les miroirs sphériques hors conditions de Gauss

On étudie la distance focale f = OF d'une lentille plan-convexe.



OF = f

$L' = R \cos i = (R^2 - h^2)^{1/2}$

$d = R - L' = R - (R^2 - h^2)^{1/2}$

$f' = f - d$

$f' = f - R + (R^2 - h^2)^{1/2}$

$f' = h/\tan 2i = h \cos 2i/\sin 2i = h \cos 2i/(2 \sin i \cos i) = h f'/(f'^2 + h^2)^{1/2} / (2 h/R\, L'/R)$

$h/(f'^2 + h^2)^{1/2} = 2 hL'/R^2$

$(f'^2 + h^2)^{1/2} = R^2/(2L')$ donc $L' = R^2/(2 (f'^2 + h^2)^{1/2})$

$L'^2 = R^4/(4 (f'^2 + h^2))$ et $L'^2 = (R^2 - h^2)$

$R^2 - h^2 = R^4/(4 (f'^2 + h^2))$ donc $f'^2 + h^2 = R^4/(4(R^2 - h^2)) = R^2/(4(1 - h^2/R^2))$

$f'^2 = R^2(1/(4(1 - h^2/R^2)) - h^2/R^2) = R^2(1 - 4 h^2/R^2(1 - h^2/R^2)/(4(1 - h^2/R^2)) = R^2(1 - 2h^2/R^2)^2/(4(1 - h^2/R^2))$

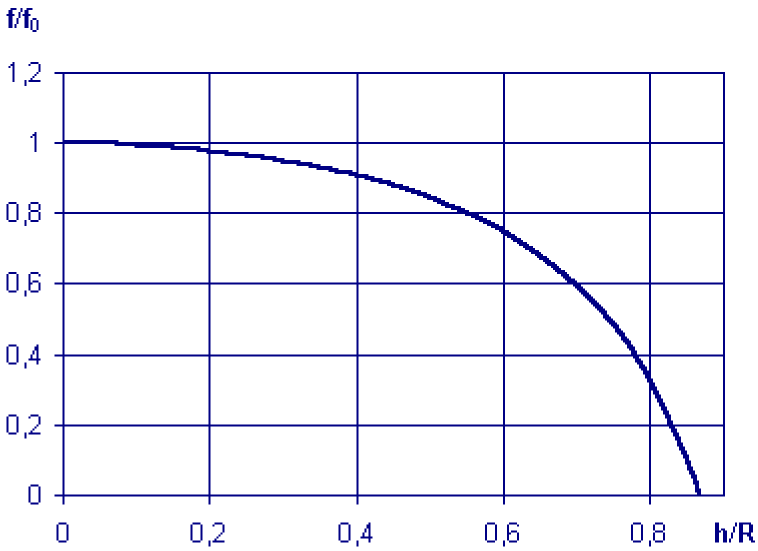
$f' = R(1 - 2h^2/R^2)/(2(1 - h^2/R^2)^{1/2})$ (L'autre signe n'a pas de signification physique)

D'autre part, $f' = f - R + (R^2 - h^2)^{1/2}$ donc

$f = R(1 - 2h^2/R^2)/(2(1 - h^2/R^2)^{1/2}) + R - (R^2 - h^2)^{1/2} = R (1 - (1 - h^2/R^2)^{1/2} +$
$(1 - 2h^2/R^2)/(2(1 - h^2/R^2)^{1/2}))$

$f = R(2(1 - h^2/R^2)^{1/2} - 1)/(2(1 - h^2/R^2)^{1/2}) = R(1 - 1/(2(1 - h^2/R^2)^{1/2}))$

$f = R(1 - 0{,}5/(1 - h^2/R^2)^{1/2}) = f_0 (2 - 1/(1 - h^2/R^2)^{1/2})$ ($f_0 = R/2$ est la distance focale du miroir)



$f_0 = R/2$

f est indépendant de h pour $h < 0{,}15$ R

Pour $h/R = \sin 60° = 0{,}866$, $f = 0$

Valeur de f pour les petites valeurs de h ($h^2/R^2 << 1$)

$f = R(1 - 1/(2(1 - h^2/R^2)^{1/2}))$

$f = R(1 - (1 + h^2/2R^2)/2) = R(1/2 - h^2/R^2/4))$

$f = 0{,}5 R(1 - h^2/2R^2) = f_0 (1 - h^2/2R^2)$ ($f_0 = R/2$ est la distance focale du miroir)

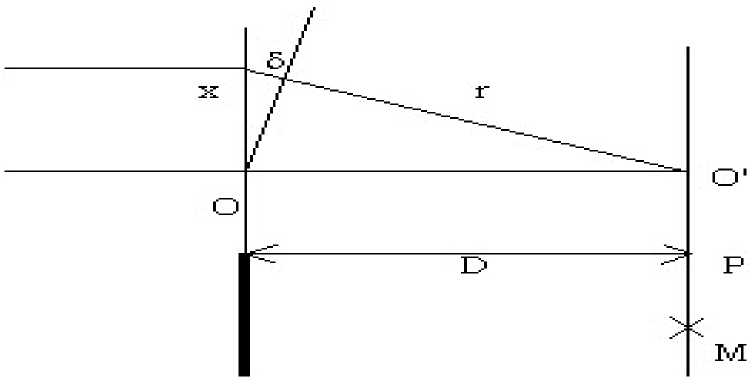
Pour que f soit supérieur à 99% de f_0 (Conditions de Gauss) il faut $h^2/2R^2 < 0{,}01$ donc $h^2/R^2 < 0{,}02$ donc $h/R < 0{,}14$

On est dans les conditions de Gauss si le rayon de la zone utile (du diaphragme) est inférieur à R/10 ou si le diamètre est inférieur à $4f_0/10$ environ $f_0/2$.

Pour un télescope de distance focale de 1m, cela correspond à un miroir de 40 cm de diamètre. On obtient alors une image d'un point constituée d'un léger halo de 2 mm de rayon. C'est peu apparent mais inacceptable pour des images de grande résolution. C'est pourquoi on utilise des miroirs paraboliques qui sont parfaitement stigmatiques pour les télescopes astronomiques.

4. Pouvoir de résolution d'un instrument d'optique

4.1 Schéma

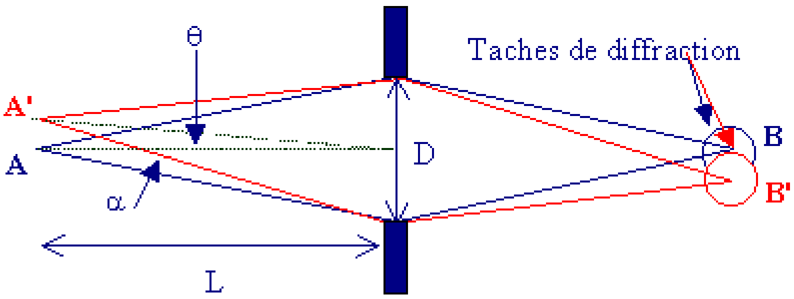


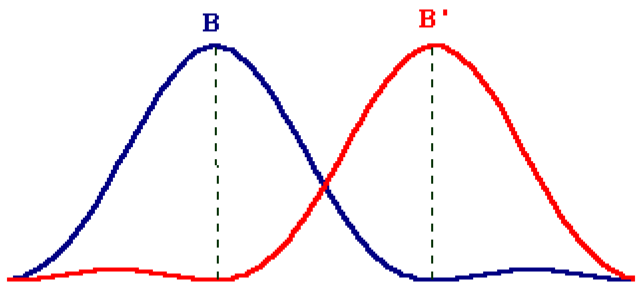
Le premier zéro se trouve pour $\theta = 1{,}22\ \lambda/a$ donc quand le rayon qui passe par le haut de l'ouverture fait un trajet plus long de 1,22 λ que le rayon passant par le bas.

En pratique, le pouvoir de résolution étant une notion approximative, on peut prendre une différence de λ

4.2 Critère de Rayleigh

On considère que deux points sont discernables si leurs images, élargies par la diffraction due à l'objectif de l'instrument d'optique sont telles que le minimum de l'une est confondu avec le maximum de l'autre. On a alors :





A donne une image centrée en B et A' donne une image B' dont le premier minimum de diffraction est aussi en B.

Ces deux points A et A' sont juste discernables (critère de Rayleigh)

On pose AA' = d et α l'angle sous lequel l'objectif est vu depuis le point A

La différence de marche δ entre les deux rayons extrêmes (en rouge) vaut :

$\delta = ((D/2 + d)^2 + L^2)^{1/2} - ((D/2 - d)^2 + L^2)^{1/2} = (D^2/4 + L^2 + Dd)^{1/2} - (D^2/4 + L^2 - Dd)^{1/2}$ en négligeant d^2

$\delta = (D^2/4 + L^2)^{1/2}((1 + Dd/(D^2/4 + L^2))^{1/2} - (1 - Dd/(D^2/4 + L^2))^{1/2} =$

$(D^2/4 + L^2)^{1/2}(1 + 0{,}5\, Dd/(D^2/4 + L^2) - 1 - 0{,}5\, Dd/(D^2/4 + L^2))$

$\delta = (D^2/4 + L^2)^{1/2}(Dd/(D^2/4 + L^2) = Dd/(D^2/4 + L^2)^{1/2}$ or $D/(D^2/4 + L^2)^{1/2} = 2d\sin(\alpha/2)$

$\delta = 2d\sin(\alpha/2)$

donc d'après le critère de Rayleigh, les deux points seront juste discernables si $2d\sin(\alpha/2) = \lambda$

$d = \lambda/(2\sin(\alpha/2))$ α n'est pas très grand donc $2\sin(\alpha/2) = \sin\alpha$

$d = \lambda/\sin\alpha$

4.3 Pouvoir de résolution d'un télescope spatial

Dans l'espace, la résolution réelle du télescope n'est pas réduite par les turbulences atmosphériques comme c'est le cas pour les télescopes terrestres non adaptatifs.
$\theta = d/L = \lambda/(L \sin\alpha)$ α est très petit donc $L \sin\alpha = L\,\alpha = D$
$\theta = \lambda/(L \sin\alpha) = \lambda/D$
$\boldsymbol{\theta = \lambda/D}$
Le télescope Hubble a un diamètre de 2,4 m. On prend une l moyenne de 500 nm.
On obtient $\theta = 2{,}1.10^{-7}$ rd ce qui correspond à distinguer un cratère de 80 m de diamètre sur la lune.

4.4 Pouvoir de résolution d'un microscope

$d = \lambda/(2 \sin(\alpha/2))$
α est voisin de 60° donc un microscope ne peut pas distinguer un détail plus petit que λ, donc de l'ordre de 1µm

Remarque : On peut augmenter la résolution en diminuant λ , ce qui peut se faire en plongeant l'objectif et la préparation dans un liquide de fort indice de réfraction n. On a alors $\lambda = c/(nf) = \lambda_0/n$ et d est divisé par n. C'est la raison de l'existence d'objectifs dits " à immersion".