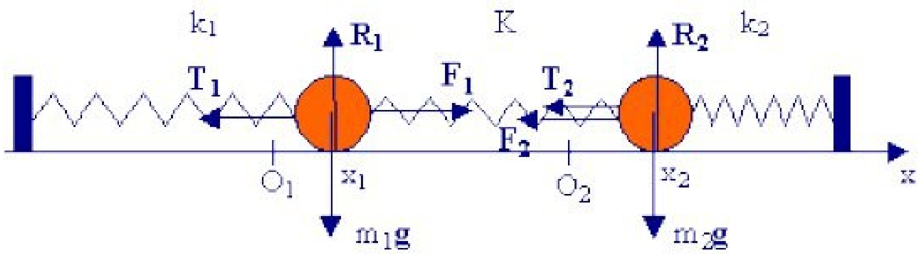
Animation

Pendules couplés

par Gilbert Gastebois

Animation

1. Schéma



A l'équilibre, les masses sont en O_1 et O_2 et aucun ressort n'est tendu*.

$T_1 = - k_1 x_1$

$T_2 = - k_2 x_2$

$F_1 = K(x_2 - x_1)$

$F_2 = - F_1 = - K(x_2 - x_1)$

* En pratique, il faut tendre les ressorts, mais cela ne change rien aux résultats.

2. Équations du mouvement

2.1. Équations différentielles du mouvement.

La 2ème loi de Newton appliquée à chaque masse donne :

$m_1 \mathbf{a_1} = \mathbf{T_1} + \mathbf{F_1} + \mathbf{R_1} + m_1 \mathbf{g}$

$m_2 \mathbf{a_2} = \mathbf{T_2} + \mathbf{F_2} + \mathbf{R_2} + m_2 \mathbf{g}$

On projette ces deux relations vectorielles sur l'axe des x horizontal, on obtient :

$m_1 d^2x_1/dt^2 = - k_1 x_1 + K(x_2 - x_1) + 0 + 0$

$m_2 d^2x_2/dt^2 = - k_2 x_2 + K(x_1 - x_2) + 0 + 0$

$d^2x_1/dt^2 = - (k_1 + K)/m_1 \ x_1 + K/m_1 \ x_2$

$d^2x_2/dt^2 = - (k_2 + K)/m_2 \ x_2 + K/m_2 \ x_1$

2.2. Solutions stationnaires (modes).

Un mode est une solution sinusoïdale de pulsation ω identique pour les deux masses.

On cherche une solution du type $x_1 = a_1 e^{i \omega t}$ et $x_2 = a_2 e^{i \omega t}$

$- \omega^2 a_1 e^{i \omega t} = - (k_1 + K)/m_1 \ a_1 e^{i \omega t} + K/m_1 a_2 e^{i \omega t}$

$- \omega^2 a_2 e^{i \omega t} = - (k_2 + K)/m_2 \ a_2 e^{i \omega t} + K/m_2 a_1 e^{i \omega t}$

$0 = ((k_1 + K)/m_1 - \omega^2) a_1 e^{i \omega t} - K/m_1 a_2 e^{i \omega t}$

$0 = ((k_2 + K)/m_2 - \omega^2) a_2 e^{i \omega t} - K/m_2 a_1 e^{i \omega t}$

On pose $(k_1 + K)/m_1 = A_{11}$ $- K/m_1 = A_{12}$ $(k_2 + K)/m_2 = A_{22}$ $- K/m_2 = A_{21}$

$0 = (A_{11} - \omega^2) \ a_1 + A_{12} \ a_2$

$0 = A_{21} \ a_1 + A_{22} - \omega^2 \ a_2$

Les valeurs de ω qui vérifient ces équations sont celles qui annulent le déterminant de la matrice A donc

$(A_{11} - \omega^2)(A_{22} - \omega^2) - A_{12} A_{21} = 0$

$\omega^4 - (A_{11} + A_{22}) \omega^2 - A_{12} A_{21} + A_{11} A_{22} = 0$ Les deux solutions sont :

$\omega_1^2 = (A_{11} + A_{22})/2 - ((A_{11} - A_{22})^2 /4) + A_{12} A_{21})^{1/2}$

$\omega_2^2 = (A_{11} + A_{22})/2 + ((A_{11} - A_{22})^2 /4) + A1_2 A_{21})^{1/2}$

$\boldsymbol{\omega_1^2 = ((k_1 + K)/m_1 + (k_2 + K)/m_2)/2 - (((k_1 + K)/m_1 - (k_2 + K)/m_2)^2/4 + k_2 /m_1m_2)^{1/2}}$

$\boldsymbol{\omega_2^2 = ((k_1 + K)/m_1 + (k_2 + K)/m_2)/2 + (((k_1 + K)/m_1 - (k_2 + K)/m_2)^2/4 + k_2 /m_1m_2)^{1/2}}$

avec $a_1/a_2 = A_{12}/(\omega^2 - A_{11})$ pour chaque mode

2.3. Cas de l'oscillateur symétrique

Oscillateur symétrique : $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$ $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ est la pulsation propre commune des deux masses isolées

$\omega_1^2 = ((k + K)/m + (k + K)/m)/2 - (((k+ K)/m - (k + K)/m)^2/4 + K^2/m^2)^{1/2}$

$\omega_1^2 = (k+ K)/m - K /m = k/m = \omega_0^2$

$a_1/ a_2 = - K/m / (k/m - k/m - K/m) = 1$ $a_1 = a_2$

$\omega_1 = \omega_0$ et $a_1 = a_2$ Les deux masses oscillent avec la même amplitude à leur propre fréquence. Le ressort de couplage reste non tendu, il n'a aucun rôle.

$\omega_2^2 = ((k + K)/m + (k + K)/m)/2 + (((k + K)/m - (k + K)/m)^2/4 + K^2 /m^2)^{1/2}$

$\omega_2^2 = (k+ K)/m + K /m = k/m + 2K/m = \omega_0^2 + 2K/m$

$a_1/ a_2 = - K/m / (k/m + 2K/m - k/m - K/m) = - 1$ $a_1 = - a_2$

$\omega_2 = (\omega_0^2 + 2K/m)^{1/2}$ et $a_1 = - a_2$ Les deux masses oscillent avec la même amplitude, mais en opposition de phase. Le ressort de couplage ajoute une force qui diminue la période d'oscillation de chaque masse.

2.4. Solution générale

la solution générale est une combinaison linéaire des deux modes

$x_1 = A_1 \exp(i\, \omega_1 t) + B_1 \exp(i\, \omega_2\, t)$ $A_1 = c_1 + i\, d_1$ $B_1 = e_1 + i\, f_1$

$x_2 = A_2 \exp(i\, \omega_1 t) + B_2 \exp(i\, \omega_2\, t)$ $A_2 = c_2 + i\, d_2$ $B_2 = e_2 + i\, f_2$

$A_1/A_2 = A_{12}/(\omega_1^2 - A_{11})$ et $B_1/B_2 = A_{12}/(\omega_2^2 - A_{11})$ sont réels donc $c_2 d_1 = c_1 d_2$ et $e_2 f_1 = e_1 f_2$

On prend ensuite la partie réelle de x_1 et x_2 compte tenu des conditions initiales sur x_1, x_2, v_1 et v_2. On obtient un système de 8 équations à 8 inconnues qu'il ne reste plus qu'à résoudre...

3. Battements de l'oscillateur symétrique.

$x_1 = A_1 \exp(i\, \omega_1 t) + B_1 \exp(i\, \omega_2\, t)$

$x_2 = A_2 \exp(i\, \omega_1 t) + B_2 \exp(i\, \omega_2\, t)$

pour simplifier les calculs, on prend un cas particulier simple de l'oscillateur symétrique :

Conditions initiales : A $t = 0$, $x_1 = x_m$, $x_2 = 0$, $v_1 = 0$ et $v_2 = 0$.

On trouve alors $A_1 = A_2 = B_1 = - B_2 = x_m/2$

$x_1 = x_m/2\, (\exp(i\, \omega_1 t) + \exp(i\, \omega_2\, t))$

$x_1 = x_m/2 \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t)\, (\exp(- i\, (\omega_2 - \omega_1)/2\, t) + \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\, t)$

$x_1 = x_m \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t)$

On prend la partie réelle, on obtient :

$x_1 = x_m \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \cos((\omega_1 + \omega_2)/2\, t)$

$x_2 = x_m /2\, (\exp(i\, \omega_1 t) - \exp(i\, \omega_2\, t))$

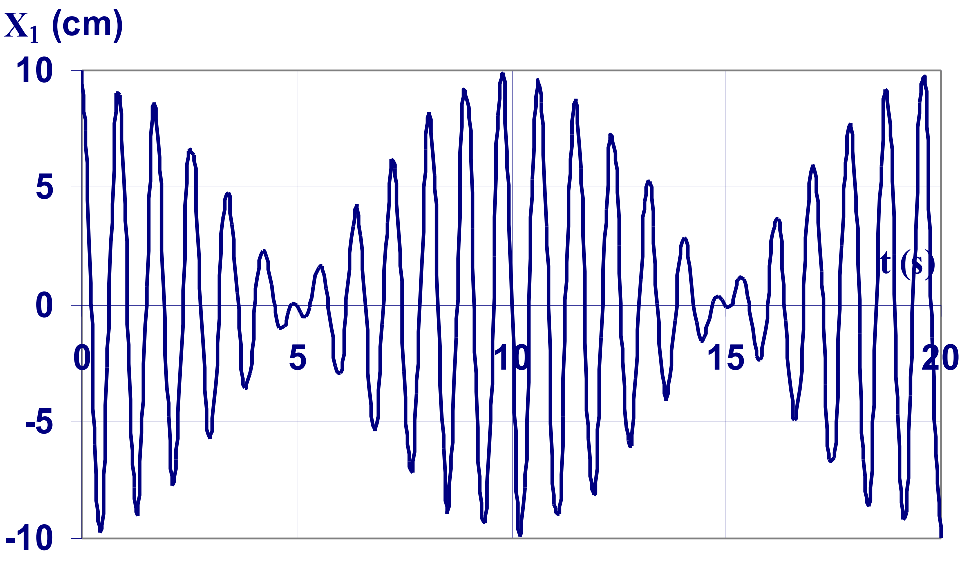
$x_2 = x_m/2 \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t)\, (\exp(- i\, (\omega_2 - \omega_1)/2\, t) - \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\, t)$

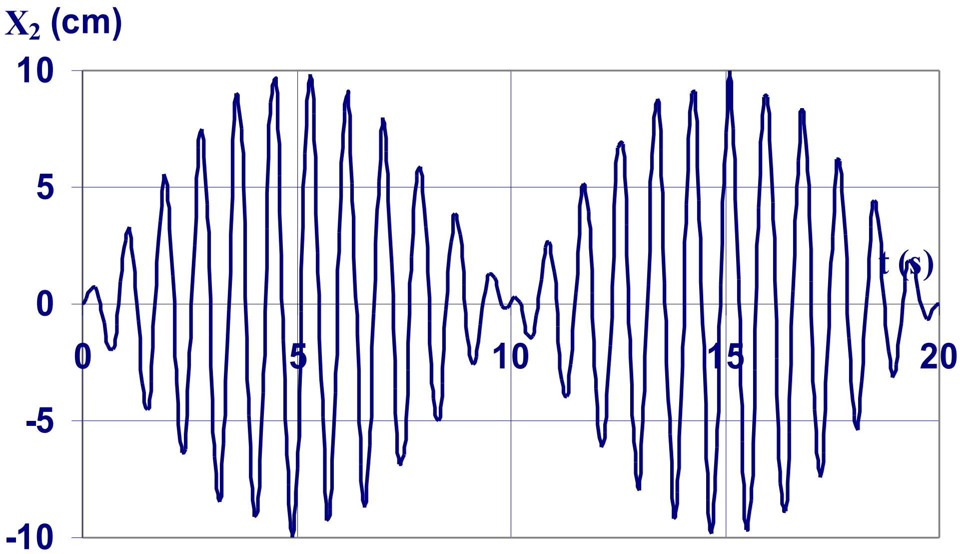
$x_2 = - i\, x_m \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t) = x_m \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t - \pi/2)$

On prend la partie réelle, on obtient :

$x_2 = x_m \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \sin((\omega_1 + \omega_2)/2\, t)$

Ces deux mouvements correspondent à des battements, l'amplitude de chaque oscillateur passe alternativement par des maxima puis par des minima nuls. Le maximum de l'un correspond au minimum de l'autre. Les deux oscillateurs s'échangent leur énergie mécanique à la période **$T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ C'est la période des battements**





m = 0,5 kg

k = 25 N/m

K = 2,33 N/m

xm = 10 cm

ω_1 = 7,07 rd/s

ω_2 = 7,7 rd/s

T = 0,85 s

T_b = 9,6 s

Pour l'oscillateur symétrique, on a : $\omega_2 - \omega_1 = (\omega_0^2 + 2K/m)^{1/2} - \omega_0$.
Si $K/m << \omega_0^2$ (faible couplage), alors $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0(1+ K/(m\omega_0^2)) - \omega_0 = K/(m\omega_0)$
$T_b = 2\pi m\omega_0/K = 2\pi(mk/K^2)^{1/2}$

Remarque : On pourrait penser que T_b devrait valoir $2\pi/((\omega_2 - \omega_1)/2) = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$, car c'est la période de $\cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$ et de $\sin((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$, mais en réalité que le cosinus (ou le sinus) vaille 1 ou -1, cela correspond dans les deux cas à un maximum d'amplitude donc la période des battements (temps qui sépare deux passages par un maximum de l'amplitude) ne vaut que la moitié et on a bien :
$T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$
Dans le cas général, on a toujours des battements avec la même période, mais les minima ne sont pas nuls. Les deux cas limites sont les deux modes ou le mouvement des deux oscillateurs est parfaitement sinusoïdal, les minima et les maxima sont égaux, on n'a plus de battements du tout.