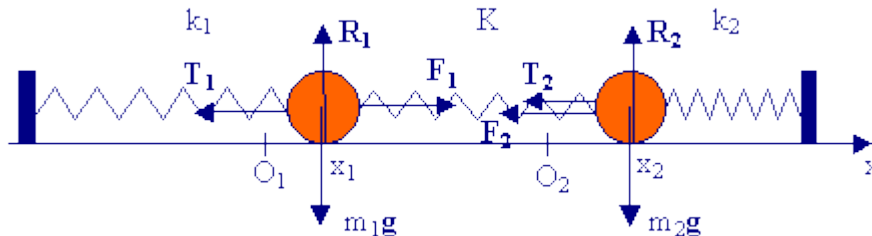


par Gilbert Gastebois

1. Schéma



A l'équilibre, les masses sont en \$O_1\$ et \$O_2\$ et aucun ressort n'est tendu.

$$T_1 = -k_1 x_1$$

$$T_2 = -k_2 x_2$$

$$F_1 = K(x_2 - x_1)$$

$$F_2 = -F_1 = -K(x_2 - x_1)$$

2 Équations du mouvement

2.1. Équations différentielles du mouvement.

$$m_1 a_1 = T_1 + F_1 + R_1 + m_1 g$$

$$m_2 a_2 = T_2 + F_2 + R_2 + m_2 g$$

En projetant sur l'axe horizontal, on obtient :

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + K(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - K(x_2 - x_1)$$

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{K}{m_1}\right) x_1 + \frac{K}{m_1} x_2$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{K}{m_2}\right) x_2 + \frac{K}{m_2} x_1$$

2.2. Solutions stationnaires (modes).

Un mode est une solution sinusoïdale de pulsation \$\omega\$ identique pour les deux masses.

On cherche une solution du type \$x_1 = a_1 e^{i\omega t}\$ et \$x_2 = a_2 e^{i\omega t}\$

$$-\omega^2 a_1 e^{i\omega t} = -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{K}{m_1}\right) a_1 e^{i\omega t} + \frac{K}{m_1} a_2 e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 a_2 e^{i\omega t} = -\left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{K}{m_2}\right) a_2 e^{i\omega t} + \frac{K}{m_2} a_1 e^{i\omega t}$$

$$0 = \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{K}{m_1} - \omega^2\right) a_1 e^{i\omega t} - \frac{K}{m_1} a_2 e^{i\omega t}$$

$$0 = \left(\frac{k_2}{m_2} + \frac{K}{m_2} - \omega^2\right) a_2 e^{i\omega t} - \frac{K}{m_2} a_1 e^{i\omega t}$$

On pose \$\left(\frac{k_1 + K}{m_1}\right) = A_{11}\$ \$-\frac{K}{m_1} = A_{12}\$ \$\left(\frac{k_2 + K}{m_2}\right) = A_{22}\$ \$-\frac{K}{m_2} = A_{21}\$

$$0 = \begin{vmatrix} A_{11} - \omega^2 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$$

Les valeurs de \$\omega\$ qui vérifient ces équations sont celles qui annulent le déterminant de la matrice \$A\$ donc

$$(A_{11} - \omega^2)(A_{22} - \omega^2) - A_{12} A_{21} = 0$$

$$\omega^4 - (A_{11} + A_{22}) \omega^2 - A_{12} A_{21} + A_{11} A_{22} = 0$$

$$\omega_1^2 = (A_{11} + A_{22})/2 - \left(\frac{(A_{11} - A_{22})^2}{4} + A_{12} A_{21}\right)^{1/2}$$

$$\omega_2^2 = (A_{11} + A_{22})/2 + \left(\frac{(A_{11} - A_{22})^2}{4} + A_{12} A_{21}\right)^{1/2}$$

$$\omega_1^2 = ((k_1 + K)/m_1 + (k_2 + K)/m_2)/2 - (((k_1 + K)/m_1 - (k_2 + K)/m_2)^2/4 + K^2/m_1 m_2)^{1/2}$$

$$\omega_2^2 = ((k_1 + K)/m_1 + (k_2 + K)/m_2)/2 + (((k_1 + K)/m_1 - (k_2 + K)/m_2)^2/4 + K^2/m_1 m_2)^{1/2}$$

avec $a_1/a_2 = A_{12}/(\omega^2 - A_{11})$ pour chaque mode

2.3. Cas de l'oscillateur symétrique

Oscillateur symétrique : $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$ $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$ est la pulsation propre commune des deux pendules isolés

$$\omega_1^2 = ((k+K)/m + (k+K)/m)/2 - (((k+K)/m - (k+K)/m)^2/4 + K^2/m^2)^{1/2}$$

$$\omega_1^2 = (k+K)/m - K/m = k/m = \omega_0^2$$

$$a_1/a_2 = -K/m / (k/m - k/m - K/m) = 1 \quad a_1 = a_2$$

$\omega_1 = \omega_0$ et $a_1 = a_2$ Les deux masses oscillent avec la même amplitude à leur propre fréquence. Le ressort de couplage reste non tendu, il n'a aucun rôle.

$$\omega_2^2 = ((k+K)/m + (k+K)/m)/2 + (((k+K)/m - (k+K)/m)^2/4 + K^2/m^2)^{1/2}$$

$$\omega_2^2 = (k+K)/m + K/m = k/m + 2K/m = \omega_0^2 + 2K/m$$

$$a_1/a_2 = -K/m / (k/m + 2K/m - k/m - K/m) = -1 \quad a_1 = -a_2$$

$\omega_2 = (\omega_0^2 + 2K/m)^{1/2}$ et $a_1 = -a_2$ Les deux masses oscillent avec la même amplitude, mais en opposition de phase. Le ressort intermédiaire ajoute une force qui diminue la période d'oscillation de chaque masse.

2.4. Solution générale

la solution générale est une combinaison linéaire des deux modes

$$x_1 = A_1 \exp(i \omega_1 t) + B_1 \exp(i \omega_2 t)$$

$$x_2 = A_2 \exp(i \omega_1 t) + B_2 \exp(i \omega_2 t) \quad A_1/A_2 = A_{12}/(\omega_1^2 - A_{11}) \quad B_1/B_2 = A_{12}/(\omega_2^2 - A_{11})$$

3. Battements de l'oscillateur symétrique.

$$x_1 = A_1 \exp(i \omega_1 t) + B_1 \exp(i \omega_2 t)$$

$$x_2 = A_2 \exp(i \omega_1 t) + B_2 \exp(i \omega_2 t)$$

pour simplifier les calculs, on prend un cas particulier simple de l'oscillateur symétrique :

Les deux pendules sont identiques ($A_1 = A_2$ $B_1 = -B_2$) et à $t = 0$, $x_1 = x_{1 \max}$ et $x_2 = 0$.

$$\text{Alors } A_1 = B_1 \quad A_2 = -B_2$$

$$\text{On pose : } A_1 = A_2 = B_1 = -B_2 = A/2$$

$$x_1 = A/2 (\exp(i \omega_1 t) + \exp(i \omega_2 t))$$

$$x_1 = A/2 \exp(i (\omega_1 + \omega_2)/2 t) (\exp(-i (\omega_2 - \omega_1)/2 t) + \exp(i (\omega_2 - \omega_1)/2 t))$$

$$x_1 = A \cos((\omega_2 - \omega_1)/2 t) \exp(i (\omega_1 + \omega_2)/2 t)$$

On prend la partie réelle, on obtient :

$$x_1 = A \cos((\omega_2 - \omega_1)/2 t) \cos((\omega_1 + \omega_2)/2 t)$$

$$x_2 = A/2 (\exp(i \omega_1 t) - \exp(i \omega_2 t))$$

$$x_2 = A/2 \exp(i (\omega_1 + \omega_2)/2 t) (\exp(-i (\omega_2 - \omega_1)/2 t) - \exp(i (\omega_2 - \omega_1)/2 t))$$

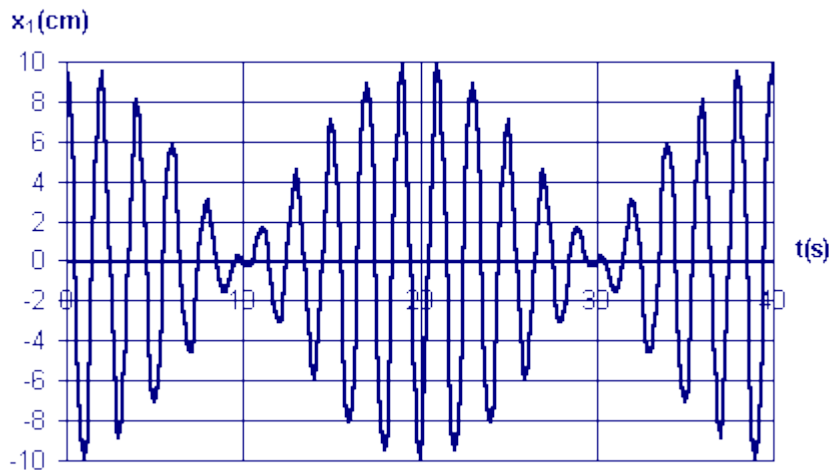
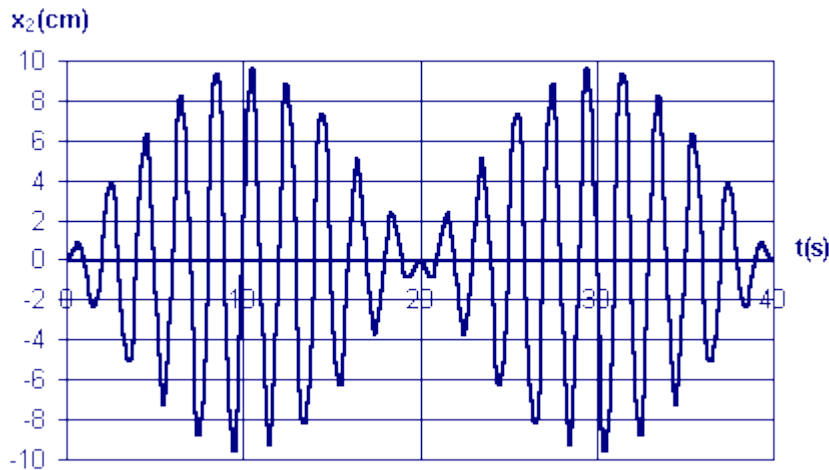
$$x_2 = -i A \sin((\omega_2 - \omega_1)/2 t) \exp(i (\omega_1 + \omega_2)/2 t) = A \sin((\omega_2 - \omega_1)/2 t) \exp(i (\omega_1 + \omega_2)/2 t - \pi/2)$$

On prend la partie réelle, on obtient :

$$x_2 = A \sin((\omega_2 - \omega_1)/2 t) \sin((\omega_1 + \omega_2)/2 t)$$

Ces deux mouvements correspondent à des battements, l'amplitude de chaque oscillateur passe alternativement par des maxima puis par des minima nuls. Le maximum de l'un correspond au minimum de l'autre. Les deux oscillateurs s'échangent leur énergie mécanique à la période

$$T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1) \quad \text{C'est la période des battements}$$



Pour l'oscillateur symétrique, on a : $\omega_2 - \omega_1 = (\omega_0^2 + 2K/m)^{1/2} - \omega_0$.

Si $K/m \ll \omega_0^2$ (faible couplage), alors $\omega_2 - \omega_1 = \omega_0(1 + K/m\omega_0^2) - \omega_0 = K/(m\omega_0)$

$$T_b = 2\pi m\omega_0/K$$

Remarque : On pourrait penser que T_b devrait valoir $2\pi/((\omega_2 - \omega_1)/2) = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$, car c'est la période de $\cos((\omega_2 - \omega_1)/2 t)$ et de $\sin((\omega_2 - \omega_1)/2 t)$, mais en réalité que le cosinus (ou le sinus) vaille 1 ou -1, cela correspond dans les deux cas à un maximum d'amplitude donc la période des battements (temps qui sépare deux passages par un maximum de l'amplitude) ne vaut que la moitié et on a bien :

$$T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$$

Dans le cas général, on a toujours des battements avec la même période, mais les minima ne sont pas nuls. Les deux cas limites sont les deux modes ou le mouvement des deux oscillateurs est parfaitement sinusoïdal, les minima et les maxima sont égaux, on n'a plus de battements du tout.