L'oscillateur harmonique ou amorti

par Gilbert Gastebois

1. Oscillations libres amorties

1.1 Équation différentielle du mouvement d'un oscillateur horizontal.

m a = T + f

T = - k x

f = - h v (frottement fluide laminaire)

En projection sur Ox :

$m\, d^2x/dt^2 = - k\, x - h\, dx/dt$

$d^2x/dt^2 = - k/m\, x - h/m\, dx/dt$

On pose $k/m = \omega_0^2$ et $h/m = \gamma$

$$\mathbf{d^2x/dt^2 + \gamma\, dx/dt + \omega_0^2\, x = 0}$$

Si l'oscillateur n'est pas horizontal, on obtient la même équation, x représente encore l'écart par rapport à l'équilibre.

1.2 Solution de l'équation différentielle.

On cherche une solution du type $x = c\, e^{\alpha t}$

$\alpha^2 c\, e^{\alpha t} + \gamma\, \alpha\, c\, e^{\alpha t} + \omega_0^2 c\, e^{\alpha t} = 0$

$\alpha^2 + \gamma\, \alpha + \omega_0^2 = 0$

$\alpha_1 = - \gamma/2 + (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$\alpha_2 = - \gamma/2 - (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$$\mathbf{x = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)}$$

1.3 Solution apériodique $\gamma > 2\omega_0$.

$\gamma > 2\omega_0$

donc α_1 et α_2 sont réels.

$$\mathbf{x = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)}$$

$$\mathbf{v = \alpha_1 a \exp(\alpha_1 t) + \alpha 2\, b \exp(\alpha_2 t)}$$

Conditions initiales : A t = 0 $x = x_0$ et $v = v_0$

On pose $\omega' = (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$\alpha_1 = - \gamma/2 + \omega'$ et $\alpha_2 = - \gamma/2 - \omega'$

$x_0 = a + b$

$v_0 = \alpha_1 a + \alpha_2 b$ d'où

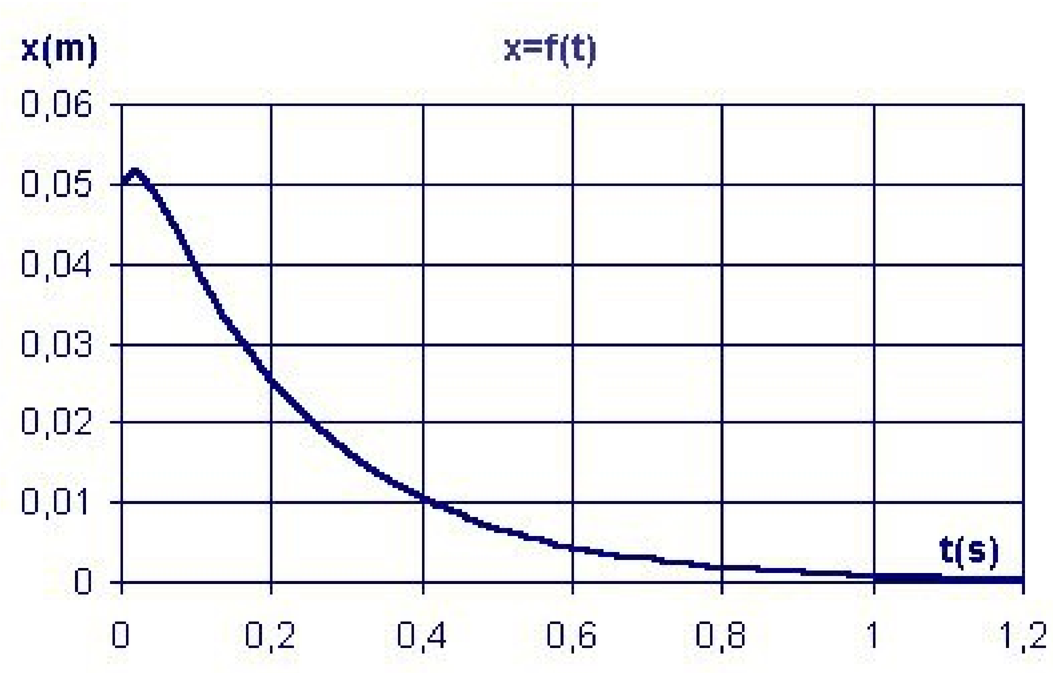
$a = (\alpha_2 x_0 - v_0)/(\alpha_2 - \alpha_1) = 0{,}5/\omega' ((\omega' + \gamma/2)\, x_0 + v_0)$

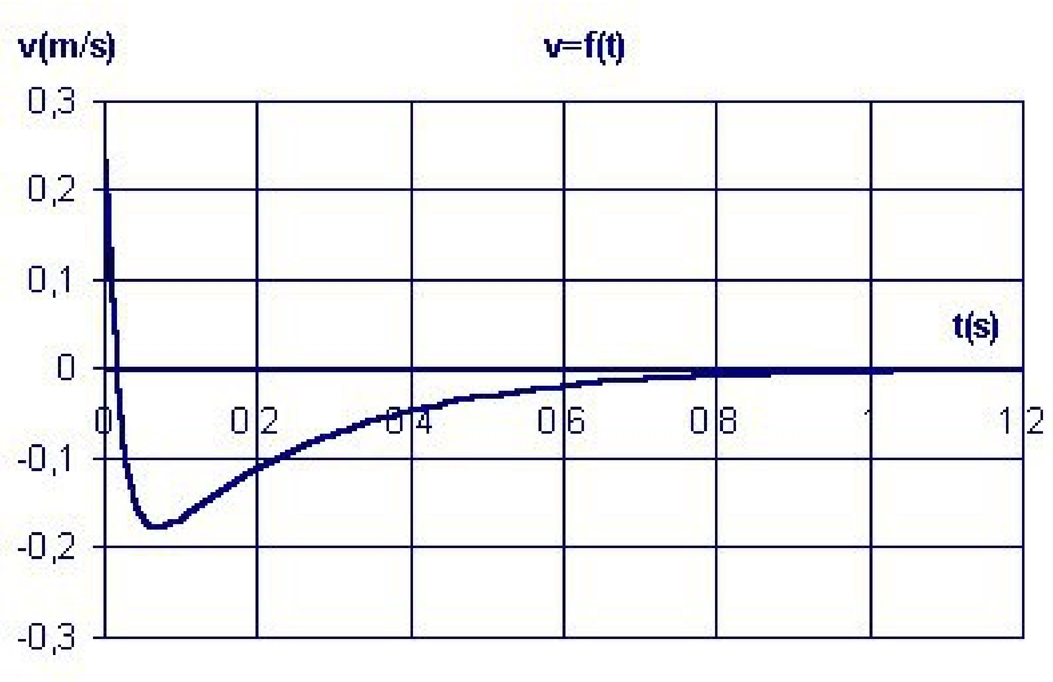
$b = (\alpha_1 x_0 - v_0)/(\alpha_1 - \alpha_2) = 0{,}5/\omega' ((\omega' - \gamma/2)\, x_0 - v_0)$

En remplaçant et en développant les équations de x et v, on obtient :

$$\mathbf{x = e^{-\gamma/2\, t} (x_0 \,ch(\omega't) + (v_0 + \gamma x_0/2)/\omega' \,sh(\omega't))}$$

$$\mathbf{v = e^{-\gamma/2\, t} (v_0 \,ch(\omega't) + (x_0 (\omega' - \gamma^2/(4\omega')) - \gamma v_0/(2\omega'))\, sh(\omega't))}$$





1.4 Solution oscillatoire amortie $\gamma < 2\omega_0$.

$\gamma < 2\omega_0$

donc α_1 et α_2 sont complexes.

$\alpha_1 = -\gamma/2 + j\,(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = -\gamma/2 + j\,\omega'$ (On pose $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = \omega'$)

$\alpha_2 = -\gamma/2 - j\,(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = -\gamma/2 - j\,\omega'$

$x = a\,e^{-\gamma/2\,t + j\,\omega' t} + b\,e^{-\gamma/2\,t - j\,\omega' t}$

$x = e^{-\gamma/2\,t}\,(\,a\,e^{j\,\omega' t} + b\,e^{-j\omega' t}\,)$

$a = a_r + j\,a_i\, b = b_r - j\,b_i$

$x = e^{-\gamma/2\,t}\,(\,(a_r + j\,a_i\,)\,(\,\cos(\omega' t) + j\,\sin(\omega' t)) + (b_r + j\,b_i\,)(\,\cos(\omega' t) - j\,\sin(\omega' t))\,)$

$x = e^{-\gamma/2\, t}((a_r + b_r) (\cos(\omega't) + (b_i - a_i) (\sin(\omega't)) + j ((a_r - b_r)(\sin(\omega't) + (a_i + b_i)\cos(\omega't)))$

x est la partie réelle donc

$x = e^{-\gamma/2\, t}((a_r + b_r) (\cos(\omega't) + (b_i - a_i) (\sin(\omega't))$ On pose $a_r + b_r = a$ et $b_i - a_i = b$

$x = e^{-\gamma/2\, t}(a \cos(\omega't) + b \sin(\omega't))$

$v = x' = - \gamma/2\, e^{-\gamma/2\, t}(a \cos(\omega't) + b \sin(\omega't)) + e^{-\gamma/2\, t}(- a\, \omega' \sin(\omega't) + b\, \omega' \cos(\omega't))$

$v = e^{-\gamma/2\, t}((- \gamma/2\, a + b\, \omega') \cos(\omega't) - (\gamma/2\, b + a\, \omega') \sin(\omega't))$

Conditions initiales : A $t = 0$ $x = x_0$ et $v = v_0$

$x_0 = a$

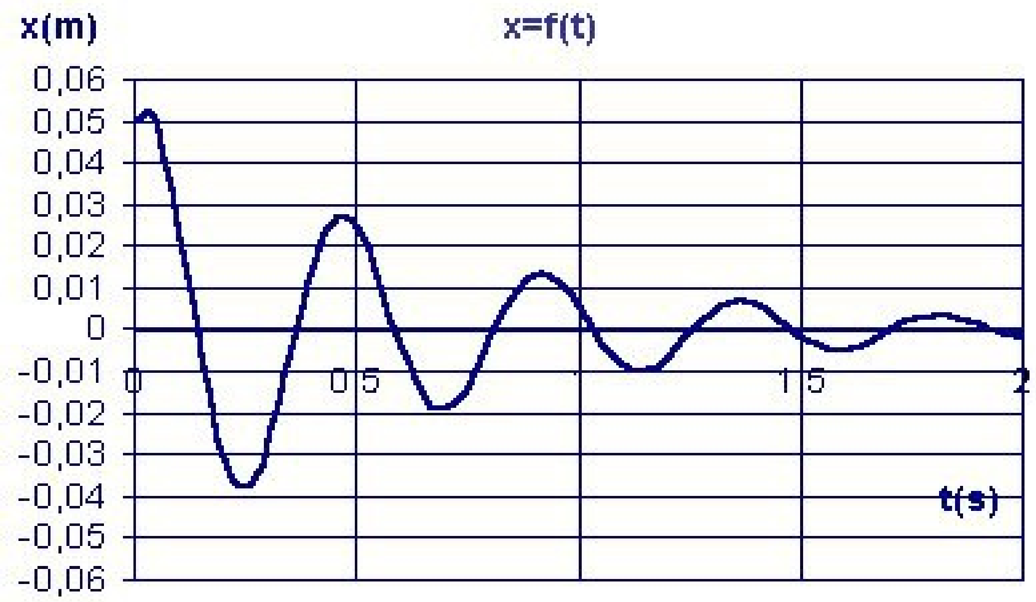
$v_0 = - \gamma/2\, a + b\, \omega'$ donc $b = (v_0 + \gamma/2\, x_0)/\omega'$ On a alors :

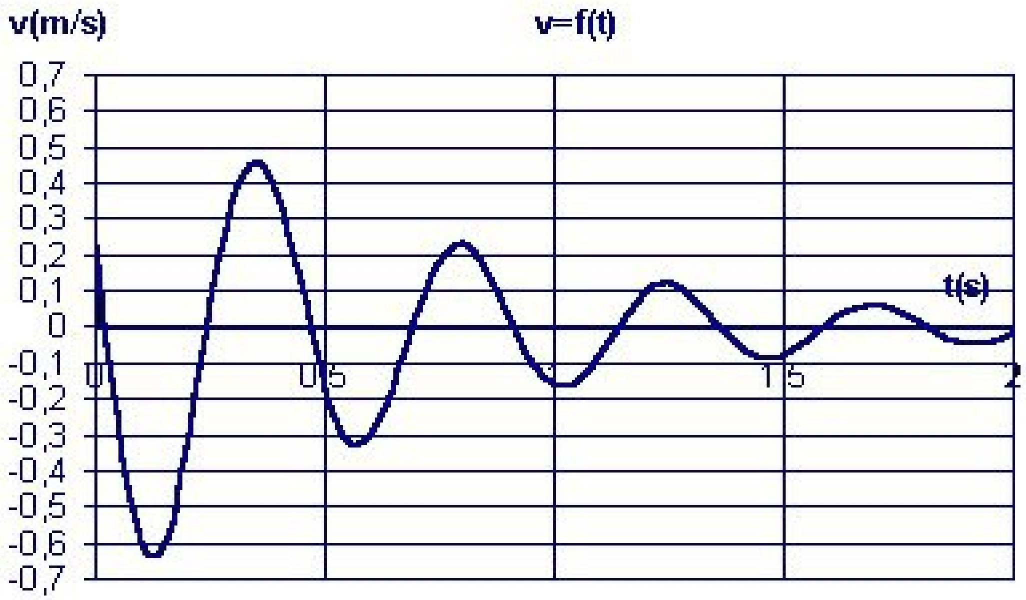
$x = e^{-\gamma/2\, t}(x_0 \cos(\omega' t) + (v_0 + \gamma\, x_0/2)/\omega' \sin(\omega' t))$

$v = e^{-\gamma/2\, t}(v_0 \cos(\omega' t) + (x_0 (\omega' - \gamma^2/(4\omega')) - \gamma\, v_0/(2\omega')) \sin(\omega't))$

Periode de l'oscillateur

$T = 2\pi/\omega' = 2\pi/(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$





1.5 Solution apériodique critique $\gamma = 2\omega_0$.

$\omega' = \omega_0 - \gamma/2 = 0$ ce qui correspond à $h = 2(k\ m)^{1/2}$

solution oscillante : $x = e^{-\gamma/2t}(\ x_0 \cos(\omega'\ t) + (v_0 + \gamma/2\ x_0)/\ \omega' \sin(\omega'\ t))$

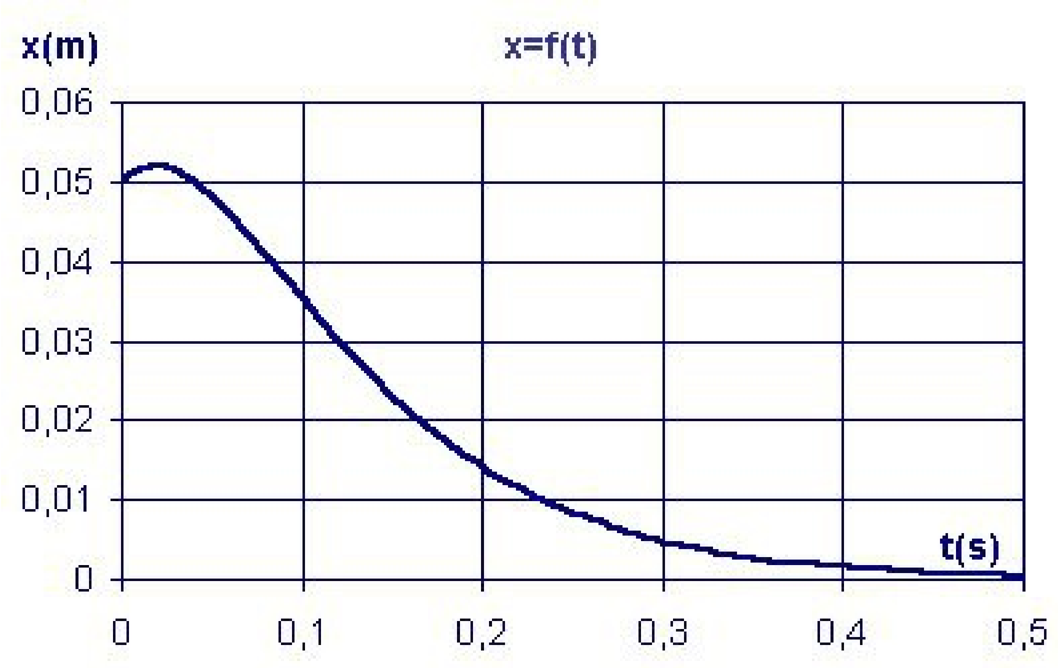
On fait tendre ω' vers 0 donc $(v_0 + \gamma/2\ x_0)\sin(\omega'\ t)/\ \omega'$ tend vers

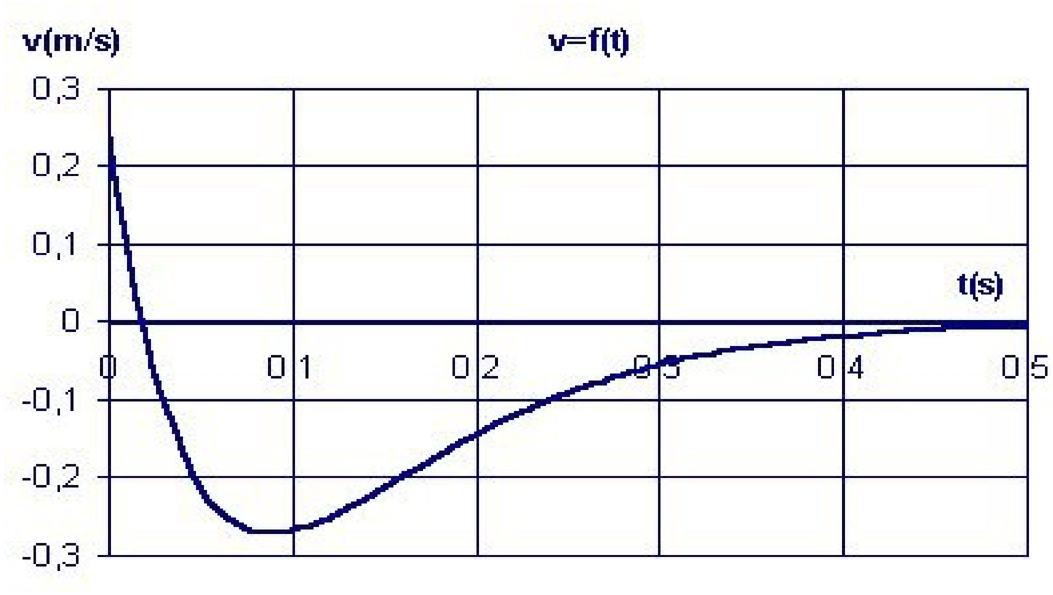
$(v_0 + \gamma/2\ x_0)\omega'\ t/\omega' = (v_0 + \gamma/2\ x_0)\ t$

$\mathbf{x = e^{-\gamma/2\ t}(\ x_0 + (v_0 + \gamma\ x_0/2)\ t)}$

$\mathbf{v = e^{-\gamma/2\ t}(v_0 - \gamma/2\ (v_0 + \gamma\ x_0/2)\ t)}$

C'est le régime apériodique qui permet d'atteindre l'équilibre le plus rapidement.





2. Oscillations forcées

2.1 Équation différentielle du mouvement d'un oscillateur horizontal.

m a = T + f

$T = - k (x - x_e)$ x_e représente le mouvement d'excitation de l'extrémité du ressort, $x - x_e$ est donc bien l'allongement du ressort, x étant l'écart par rapport a l'équilibre obtenu quand $x_e = 0$

$f = - h v = - h\, dx/dt$ (frottement fluide laminaire)

$x_e = a_0 \sin(\omega t) \Rightarrow x_e = a_0 e^{j\omega t}$

$m\, d^2x/dt^2 = - k x - h\, dx/dt + k a_0 e^{j\omega t}$

$d^2x/dt^2 = - k/m\, x - h/m\, dx/dt + k/m\, a_0 e^{j\omega t}$

On pose : $k/m = \omega_0^2$ et $h/m = \gamma$

$d^2x/dt^2 + \gamma\, dx/dt + \omega_0^2 x = a_0 \omega_0^2 e^{j\omega t}$

Si l'oscillateur n'est pas horizontal, on obtient la même équation, x représente encore l'écart par rapport a l'équilibre obtenu quand $x_e = 0$

2.2 Solution stationnaire de l'équation.

On cherche une solution du type $x = x_0 e^{j\omega t}$

$-\omega^2 x_0 e^{j\omega t} + j \gamma \omega x_0 e^{j\omega t} + \omega_0^2 x_0 e^{j\omega t} = a_0 \omega_0^2 e^{j\omega t}$

$- \omega^2 x_0 + j \gamma \omega x_0 + \omega 0^2 x_0 = a_0 \omega_0^2$

$x_0 = a_0 \omega_0^2 /(\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega)$

$\mathbf{x_0 = a_0\omega_0^2/((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2)^{1/2}}$

$\mathbf{\tan \varphi = \gamma \omega/(\omega_0^2 - \omega^2)}$

$\mathbf{x = x_0 \sin(\omega t - \varphi)}$

$\mathbf{v = j \omega a_0 \omega_0^2 /(\omega_0^2 - \omega^2 + j \gamma \omega) = j a_0 \omega_0^2/(-\omega + \omega_0^2/\omega + j \gamma)}$

$\mathbf{v_0 = x_0 \omega = a_0 \omega_0^2 \omega/((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{1/2} = a_0 \omega_0^2/((\omega_0^2/\omega - \omega)^2 + \gamma^2)^{1/2}}$

$\mathbf{v = v_0 \cos(\omega t - \varphi)}$

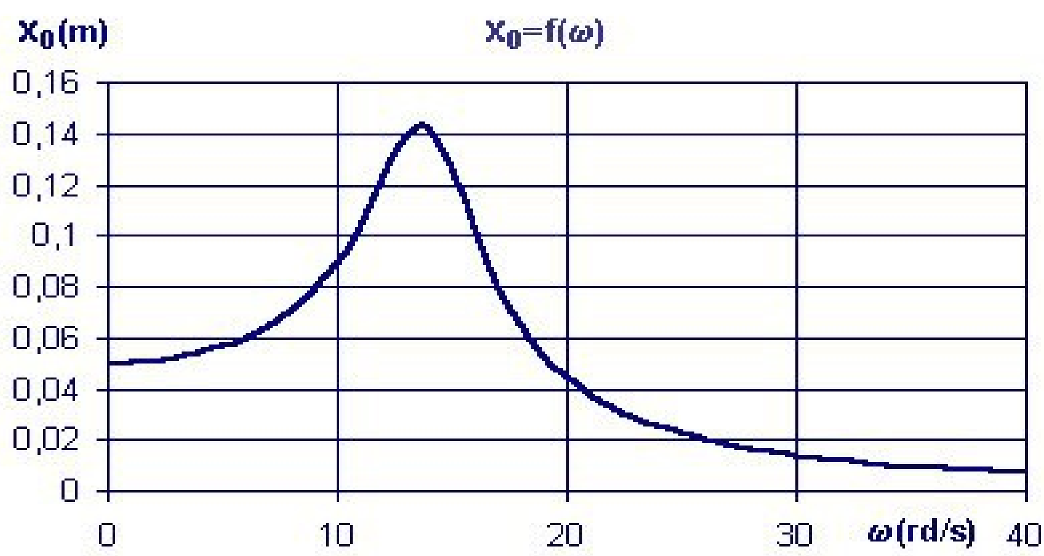
x_0 passe par son maximum pour $\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/2$

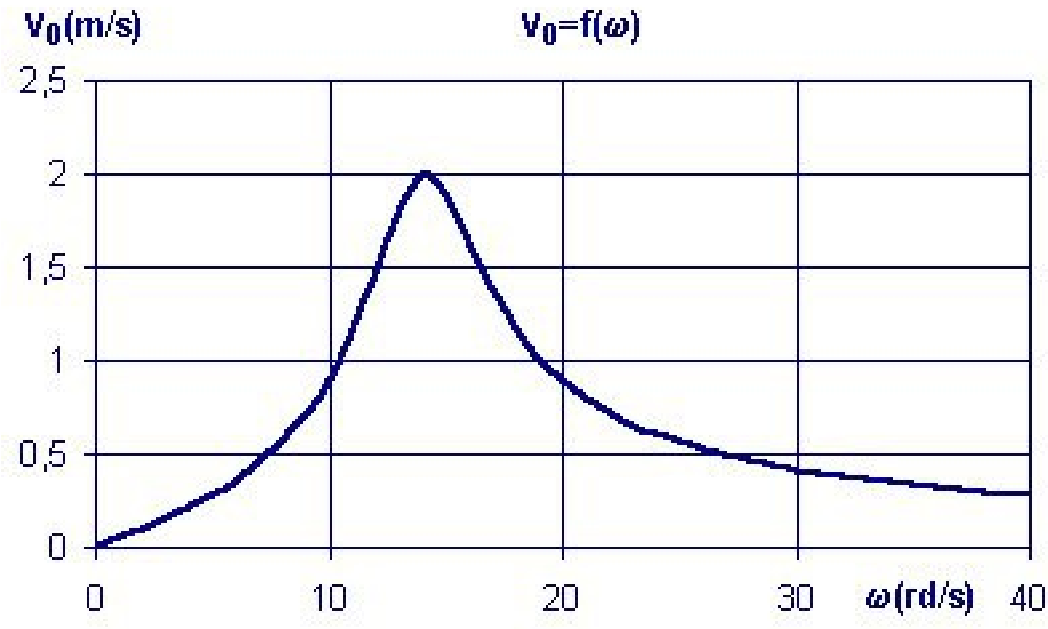
$\mathbf{x_{0max} = a_0 \omega_0^2/(\gamma^2\omega_0^2 - \gamma^4/4)^{1/2}}$ **($x_{0max} \simeq a_0 \omega_0/\gamma$ si γ est petit)**

v_0 passe par son maximum pour $\omega = \omega_0$

$\mathbf{v_{0max} = a_0 \omega_0^2/\gamma}$ **($v_{0max} \simeq \omega_0 x_{0max}$ si γ est petit)**

Exemple : k = 20 N/m m = 0,1 kg a_0 = 0,05 m h = 0,5 kg/s





La bande passante $\Delta\omega$ correspond à l'écart de pulsation pour lesquelles

$\omega^2 - \omega_0^2 = +- \gamma\omega$

$\omega^2 - \omega_0^2 +- \gamma\omega = 0 \Rightarrow \omega = +- \gamma/2 + (\gamma^2/4 + \omega_0^2)^{1/2}$

$\omega_1 = - \gamma/2 + (\gamma^2 /4 + \omega_0^2)^{1/2}$ et $\omega_2 = \gamma/2 + (\gamma^2/4 + \omega_0^2)^{1/2}$

$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \gamma$

La bande passante $\Delta\omega = \gamma$

Le facteur de qualité $Q = \omega_0/\Delta\omega = \omega_0/\gamma$

Remarque : La solution générale de l'équation est la somme de la solution des oscillations libres et de la solution stationnaire. Les oscillations libres s'amortissant très vite, il ne reste rapidement que la solution stationnaire.