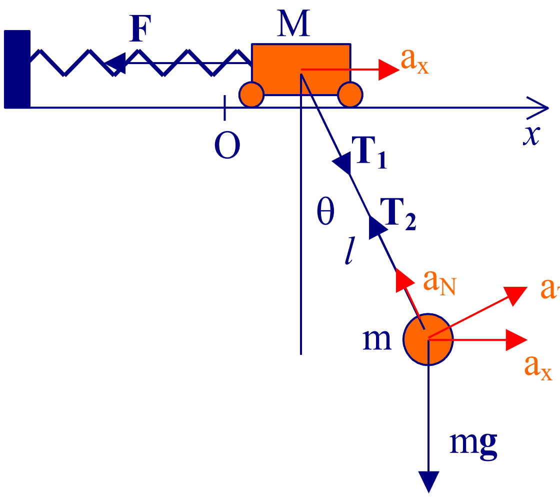
Couplage de 2 pendules simple et élastique

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



Notations :

$dy/dt = y'$ et $d^2y/dt^2 = y''$

M Masse du chariot
m Masse du pendule simple
l Longueur du pendule simple
k Raideur du ressort
T_1, T_2 Tensions sur la tige $T_1 = T_2 = T$
F Tension du ressort $F = k\,x$
a_x accélération de M : $a_x = x''$
a_N accélération normale de m : $a_N = l\,\theta'^2$
a_T accélération tangente de m : $a_T = l\,\theta''$

2. Équations différentielles du mouvement

2.1 Approche Newtonienne.

Équation de Newton pour M :

$\mathbf{Ma = F + T_1 + Mg + R_N}$ (R_N réaction normale du support horizontal sur le chariot)

En projection sur Ox, on a :

$M\,x'' = -\,k\,x + T\sin\theta$ (1)

Équation de Newton pour m :

$\mathbf{ma = m(a_x + a_T + a_N) = mg + T_2}$

En projection sur Ox, on a :

$m\,x'' + m\,a_T\cos\theta - m\,a_N\sin\theta = -\,T\sin\theta$

$m\,x'' = -\,ml\,\theta''\cos\theta + ml\,\theta'^2\sin\theta - T\sin\theta$

On extrait $T\sin\theta$ de (1) et on obtient :

$\mathbf{(M + m)\,x'' = -\,k\,x - ml\,\theta''\cos\theta + ml\,\theta'^2\sin\theta}$ (2)

Équations de Newton pour la rotation du pendule autour de son axe :

$m\,l^2\,\theta'' = M_{mg} + M_{T2} - M_{m\,ax}$ (le repère n'est pas gallileén, il faut donc retirer le moment de la pseudo-force ma_x)

$M_{mg} = -\,m\,g\,l\sin\theta$

$M_{T2} = 0$

$M_{m\,ax} = m\,x''\,l\cos\theta$

$m\,l^2\,\theta'' = -\,m\,g\,l\sin\theta - m\,x''\,l\cos\theta$

$\mathbf{l\,\theta'' = -\,g\sin\theta - x''\cos\theta}$ (3)

Équations différentielles du mouvement :

On extrait x'' de (3) et on reporte dans (2) et inversement pour θ'' , on obtient :

$$\boldsymbol{x'' = (m\, l\, \theta'^2 \sin\theta + m\, g \sin\theta \cos\theta - k\, x)/(M + m \sin^2\theta)}$$

$$\boldsymbol{\theta'' = (k \cos\theta\, x - m\, l \sin\theta \cos\theta\, \theta'^2 - (M + m)\, g \sin\theta)/(M\, l + m\, l \sin^2\theta)}$$

2.2 Approche Lagrangienne.

L = Ec - Ep

$Ec = \frac{1}{2} M V_x^2 + \frac{1}{2} m(\mathbf{V_x} + \mathbf{V_\theta})^2 = \frac{1}{2} M x'^2 + \frac{1}{2} m (x'^2 + l^2 \theta'^2 + 2 x' l \theta' \cos\theta)$

$Ep = \frac{1}{2} k x^2 + mg\, l (1 - \cos\theta)$ (Je choisis $Ep_{pesanteur} = 0$ à la position basse de m)

Formules de Lagrange :

$d(d\mathbf{L}/dx')/dt - d\mathbf{L}/dx = 0$

$d(d\mathbf{L}/d\theta')/dt - d\mathbf{L}/d\theta = 0$

On obtient :

$M x'' + m x'' + ml\, \theta'' \cos\theta - ml\, \theta'^2 \sin\theta - (-k x) = 0$

$m l^2 \theta'' + m\, l\, x'' \cos\theta - m\, l\, x' \theta' \cos\theta - (-m\, l\, x' \theta' \cos\theta - m\, g\, l \sin\theta) = 0$

Donc, on retrouve bien les équations (2) et (3)

$$\boldsymbol{(M + m)\, x'' = -k\, x - m\, l\, \theta'' \cos\theta + m\, l\, \theta'^2 \sin\theta}$$

$$\boldsymbol{l\, \theta'' = -g \sin\theta - x'' \cos\theta}$$

et

$$\boldsymbol{x'' = (m\, l\, \theta'^2 \sin\theta + m\, g \sin\theta \cos\theta - k\, x)/(M + m \sin^2\theta)}$$

$$\boldsymbol{\theta'' = (k \cos\theta\, x - m\, l \sin\theta \cos\theta\, \theta'^2 - (M + m)\, g \sin\theta)/(M\, l + m\, l \sin^2\theta)}$$

3. Solution pour les petits angles

3.1. Équations différentielles.

Si θ est petit $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ et on néglige les termes en θ^2 et au delà, ce qui élimine tous les termes contenant θ'^2 ou θ^2:

$$\boldsymbol{M\, x'' = m\, g\, \theta - k\, x}$$

$$\boldsymbol{M\, l\, \theta'' = k\, x - (M + m)\, g\, \theta}$$

3.2. Solutions stationnaires (modes).

Un mode est une solution sinusoïdale de pulsation ω identique pour les deux masses.

On cherche une solution du type $x = a_1 e^{i\omega t}$ et $\theta = a_2 e^{i\omega t}$

$- M \omega^2 a_1 e^{i\omega t} = m\, g\, a_2 e^{i\omega t} - k\, a_1 e^{i\omega t}$

$- M\, l\, \omega^2 a_2 e^{i\omega t} = k\, a_1 e^{i\omega t} - (M + m)\, g\, a_2 e^{i\omega t}$

$(-M \omega^2 + k)\, a_1 - m\, g\, a_2 = 0$

$- k\, a_1 + (-M\, l\, \omega^2 + (M + m)\, g)\, a_2 = 0$

$$0 = \begin{vmatrix} -M\omega^2 + k & -mg \\ -k & -Ml\omega^2 + (M+m)g \end{vmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$$

Les valeurs de ω qui vérifient ces équations sont celles qui annulent le déterminant de la matrice donc

$$M^2 l\ \omega^4 - (M(M+m)g + kMl)\omega^2 + kMg + kmg - kmg = 0$$

$$M l\ \omega^4 - ((M+m)g + kl)\omega^2 + kg = 0$$

On obtient deux solutions physiques :

$$\boldsymbol{\omega_1 = (((M+m)g + kl - ((Mg - kl)^2 + 2mg((M+m/2)g + kl))^{1/2})/(2Ml))^{1/2}}$$

$$\boldsymbol{\omega_2 = (((M+m)g + kl + ((Mg - kl)^2 + 2mg((M+m/2)g + kl))^{1/2})/(2Ml))^{1/2}}$$

avec $a_1/a_2 = mg/(k - M\omega^2)$ pour chaque mode

3.3. Solution générale

la solution générale est une combinaison linéaire des deux modes

$$\boldsymbol{x = A_1 \exp(i\omega_1 t) + B_1 \exp(i\omega_2 t)}$$

$$\boldsymbol{l\theta = A_2 \exp(i\omega_1 t) + B_2 \exp(i\omega_2 t)}$$

$A_1/A_2 = mg/(kl - Ml\omega_1^2)$ $B_1/B_2 = mg/(kl - Ml\omega_2^2)$

4. Battements de l'oscillateur.

Dans le cas général, les fréquences des deux modes sont très différentes car le discriminant est grand et on n'observe pas les battements. En effet, les battements ne sont apparents que si les fréquences ω_1 et ω_2 sont suffisamment proches.

Pour obtenir des valeurs proches et donc un discriminant faible, il faut que $Mg - kl \simeq 0$, donc que les fréquences propres des deux pendules soient très proches $g/l \simeq k/M$
et que $m << M$
On choisit donc $m = M/100$ et $Mg = kl$ et pour simplifier les calculs, on prend un cas particulier simple : à $t = 0$, $x = x_0$ $\theta = 0$ et les vitesses sont nulles.

on a alors $A_2 = -B_2$, $A_2 \simeq (M/m)^{1/2} A_1$ et $B_2 \simeq -(M/m)^{1/2} B_1$ donc $A_1 \simeq B_1$

On aura donc : $A_1 = B_1 = x_0/2$ $A_2 = (M/m)^{1/2} x_0/2$ $B_2 = -(M/m)^{1/2} x_0/2$

$$x = x_0/2\,(\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t))$$

$$x = x_0/2 \exp(i(\omega_1 + \omega_2)/2\ t)\,(\exp(-i(\omega_2 - \omega_1)/2\ t) + \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$$

$$x = x_0 \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t) \exp(i(\omega_1 + \omega_2)/2\ t)$$

On prend la partie réelle, on obtient :

$$\boldsymbol{x = x_0 \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t) \cos((\omega_1 + \omega_2)/2\ t)}$$

$l\theta = A/2\,(\exp(i\omega_1 t) - \exp(i\omega_2 t))$ avec $A = (M/m)^{1/2} x_0$

$$l\theta = A \exp(i(\omega_1 + \omega_2)/2\ t)\,(\exp(-i(\omega_2 - \omega_1)/2\ t) - \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$$

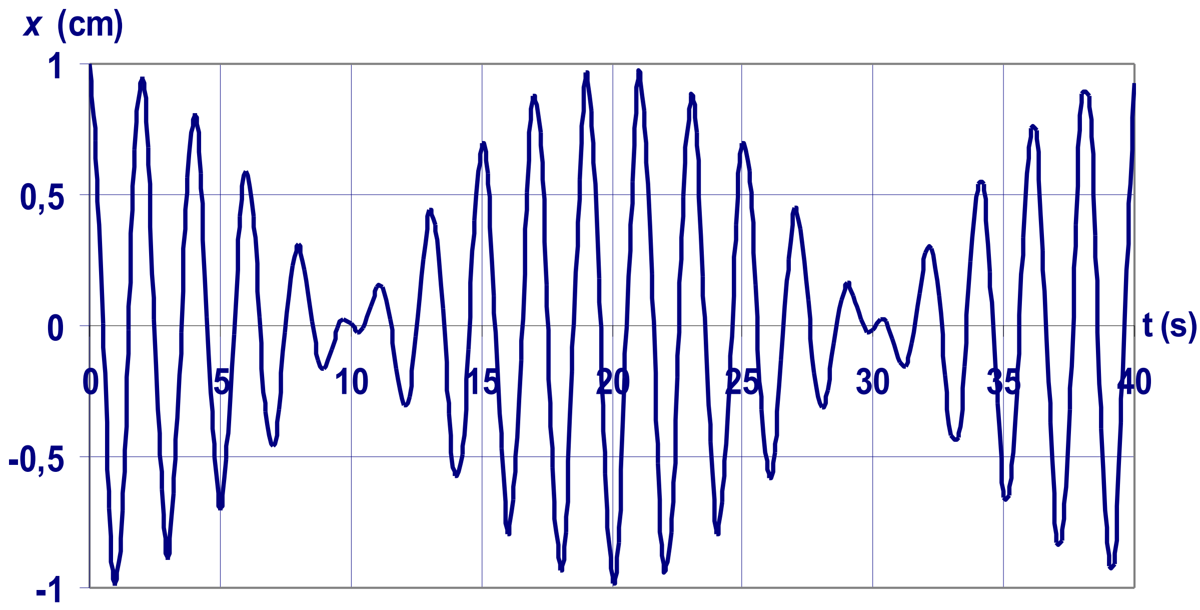
$$l\theta = -iA\sin((\omega_2 - \omega_1)/2\,t)\exp(i(\omega_1 + \omega_2)/2\,t) = A\sin((\omega_2 - \omega_1)/2\,t)\exp(i(\omega_1 + \omega_2)/2\,t - \pi/2)$$

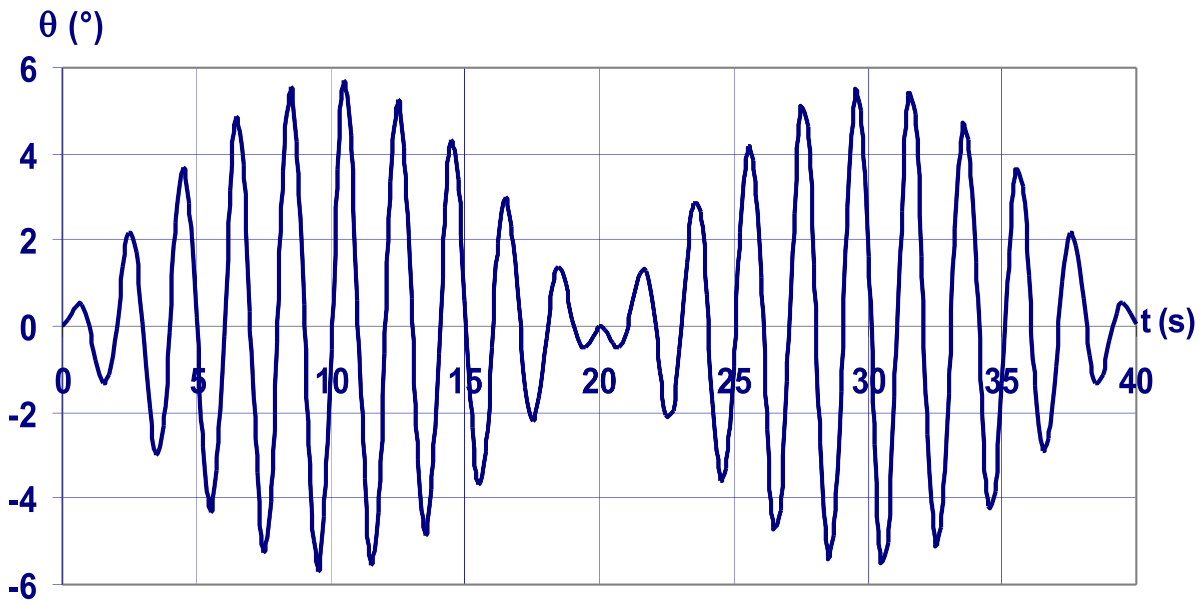
On prend la partie réelle, on obtient :

$$\boldsymbol{\theta = (M/m)^{1/2} x_0/l\ \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)\ \sin((\omega_1 + \omega_2)/2\ t)}$$

Ces deux mouvements correspondent à des battements, l'amplitude de chaque oscillateur passe alternativement par des maxima puis par des minima nuls. Le maximum de l'un correspond au minimum de l'autre. Les deux oscillateurs s'échangent leur énergie mécanique à la période $\boldsymbol{T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)}$ **C'est la période des battements**

M = 1 kg, m = 0,01 kg, g = 9,81 m/s², k = 9,81 N/m, l = Mg/k = 1 m, x_0 = 1 cm, θ_0 = 0





Pour cet oscillateur, on a, en posant $g/l = \omega_0^2$:

$\omega_2 \simeq \omega_0 (1 + ½ (m/M)^{1/2})$

$\omega_1 \simeq \omega_0 (1 - ½ (m/M)^{1/2})$ donc

$\omega_2 - \omega_1 \simeq (m/M)^{1/2}\, \omega_0 = (mg/(M\, l))^{1/2}$

$T_b \simeq 2\pi(M\, l/(mg))^{1/2} = 20$ s avec $\theta_m = (M/m)^{1/2}\, x_0/l = 0{,}1$ rd = 5,73 °

Remarque : On pourrait penser que T_b devrait valoir $2\pi/((\omega_2 - \omega_1)/2) = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$, car c'est la période de $\cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$ et de $\sin((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$, mais en réalité que le cosinus (ou le sinus) vaille 1 ou -1 , cela correspond dans les deux cas à un maximum d'amplitude donc la période des battements (temps qui sépare deux passages par un maximum de l'amplitude) ne vaut que la moitié et on a bien : $T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$