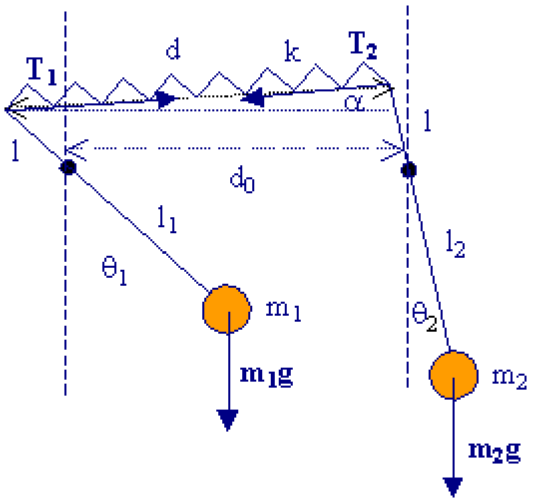
Couplage de 2 pendules simples

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



La longueur du ressort de couplage, de raideur k, non tendu est identique à l'écartement entre les deux pendules donc elle vaut d_0

Les deux extrémités du ressort sont à la même distance l de l'axe des deux pendules.

$\mathbf{T_1 = T_2 = k\,(d - d_0)}$

$d\ \cos\alpha = d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2$

$d\ \sin\alpha = l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1$

$\mathbf{d = ((d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2)^2 + (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1)^2)^{1/2}}$

Notations :

$dy/dt = y'$ et $d^2y/dt^2 = y''$

2. Équations différentielles du mouvement

2.1. Approche Newtonienne.

Équations de Newton pour un système en rotation :

$m_1\, l_1^2 \theta_1'' = M_{\mathbf{m1g}} + M_{\mathbf{T1}}$

$m_2\, l_2^2 \theta_2'' = M_{\mathbf{m2g}} + M_{\mathbf{T2}}$ (Le moment de la tension de chaque pendule est nul puisque la force passe par l'axe)

$M_{\mathbf{m1g}} = - m_1 g\, l_1 \sin\theta_1$

$M_{\mathbf{T1}} = - \mathbf{T_1} \times \mathbf{l} = - T_1 \cos\alpha\ \, l \cos\theta_1 + T_1 \sin\alpha\, (- l \sin\theta_1) =$

$- k\, l\, (d - d_0)\, (\cos\alpha \cos\theta_1 + \sin\alpha \sin\theta_1)$

$\cos\alpha = (d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2)/d$ $\sin\alpha = (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1)/d$

$M_{\mathbf{T1}} = - \mathbf{T_1} \times \mathbf{l} = - k\, l\, (d - d_0)\, ((d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2) \cos\theta_1 + (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1) \sin\theta_1)/d$

$= - k\, l\, (d - d_0)\, (d_0 \cos\theta_1 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/d$

$M_{\mathbf{m2g}} = - m_2 g\, l_2 \sin\theta_2$

$M_{\mathbf{T2}} = \mathbf{T_2} \times \mathbf{l} = T_2 \cos\alpha\ \, l \cos\theta_2 - T_2 \sin\alpha(- l \sin\theta_2) =$

$k\, l\, (d - d_0)\, (\cos\alpha \cos\theta_2 + \sin\alpha \sin\theta_2)$

$\cos\alpha = (d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2)/d$ $\sin\alpha = (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1)/d$

$M_{\mathbf{T2}} = \mathbf{T_2} \times \mathbf{l} = k\, l\, (d - d_0)((d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2) \cos\theta_2 + (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1) \sin\theta_2)/d =$

$k\, l\, (d - d_0)\, (d_0 \cos\theta_2 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/d$

$\mathbf{\theta_1'' = - g/l_1 \sin\theta_1 - k\, l\, (d - d_0)\, (d_0 \cos\theta_1 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/(m_1 d\, l_1^2)}$

$\mathbf{\theta_2'' = - g/l_2 \sin\theta_2 + k\, l\, (d - d_0)\, (d_0 \cos\theta_2 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/(m_2 d\, l_2^2)}$

$(d = ((d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2)^2 + (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1)^2)^{1/2})$

2.2. Approche Lagrangienne.

$L = Ec - Ep = 1/2\ m_1\ l_1^2\theta_1'^2 + 1/2\ m_2\ l_2^2\theta_2'^2 + m_1 g \cos\theta_1 + m_2 g \cos\theta_2 - 1/2\ k(d - d_0)^2$

(altitude nulle sur les axes des pendules)

Formules de Lagrange :

$d(dL/d\theta_1')/dt - dL/d\theta_1 = 0$

$d(dL/d\theta_2')/dt - dL/d\theta_2 = 0$

$m_1\ l_1^2\theta_1'' = - m_1 g \sin\theta_1 - k(d - d_0)\ ((d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2) \cos\theta_1 + (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1) \sin\theta_1)/d$

$m_1\ l_1^2\theta_1'' = - m_1 g \sin\theta_1 - kl\ (d - d_0)(d_0 \cos\theta_1 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/d$

$m_2\ l_2^2\theta_2'' = - m_2 g \sin\theta_2 + k(d - d_0)\ ((d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2) \cos\theta_1 + (l \cos\theta_2 - l\cos\theta_1) \sin\theta_1)/d$

$m_2\ l_2^2\theta_2'' = - m_1 g \sin\theta_2 + kl\ (d - d_0)(d_0 \cos\theta_2 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/d$

$\boldsymbol{\theta_1'' = - g/l_1 \sin\theta_1 - k\,l\,(d - d_0)\,(d_0 \cos\theta_1 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/(m_1 d\, l_1^2)}$

$\boldsymbol{\theta_2'' = - g/l_2 \sin\theta_2 + k\,l\,(d - d_0)\,(d_0 \cos\theta_2 + l \sin(\theta_1 - \theta_2))/(m_2 d\, l_2^2)}$

$(d = ((d_0 + l \sin\theta_1 - l \sin\theta_2)^2 + (l \cos\theta_2 - l \cos\theta_1)^2)^{1/2})$

3. Solution pour les petits angles

3.1. Équations différentielles.

Si θ est petit $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ et $d = d_0 + l \sin(\theta_1 - \theta_2) = d_0 + l\,(\theta_1 - \theta_2)$

$\theta_1'' = - g/l_1\ \theta_1 - k\,l^2\,(\theta_1 - \theta_2)/(m_1 l_1^2) = - (g/l_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2))\,\theta_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2)\ \theta_2$

$\theta_2'' = - g/l_2\ \theta_2 + k\,l^2\,(\theta_1 - \theta_2)/(m_2 l_2^2) = - (g/l_2 + k\,l^2/(m_2 l_2^2))\,\theta_2 + k\,l^2/(m_2 l_2^2)\ \theta_1$

$\boldsymbol{\theta_1'' = - (g/l_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2))\,\theta_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2)\ \theta_2}$

$\boldsymbol{\theta_2'' = - (g/l_2 + k\,l^2/(m_2 l_2^2))\,\theta_2 + k\,l^2/(m_2 l_2^2)\ \theta_1}$

3.2. Solutions stationnaires (modes).

Un mode est une solution sinusoïdale de pulsation ω identique pour les deux masses.

On cherche une solution du type $\theta_1 = a_1\, e^{i\omega t}$ et $\theta_2 = a_2\, e^{i\omega t}$

$- \omega^2 a_1 e^{i\omega t} = - (g/l_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2))\ a_1\ e^{i\omega t} + k\,l^2/(m_1 l_1^2)\ a_2 e^{i\omega t}$

$- \omega^2 a_2 e^{i\omega t} = - (g/l_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2))\ a_2\ e^{i\omega t} + k\,l^2/(m_1 l_1^2)\ a_1\ e^{i\omega t}$

$0 = (g/l_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2) - \omega^2)\ a_1\ e^{i\omega t} - k\,l^2/(m_1 l_1^2)\ a_2 e^{i\omega t}$

$0 = (g/l_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2) - \omega^2)\ a_2 e^{i\omega t} - k\,l^2/(m_1 l_1^2)\ a_1\ e^{i\omega t}$

On pose $(g/l_1 + k\,l^2/(m_1 l_1^2)) = A_{11}$ $\quad - k\,l^2/(m_1 l_1^2) = A_{12}$

$(g/l_2 + k\,l^2/(m_2 l_2^2)) = A_{22}$ $\quad - k\,l^2/(m_2 l_2^2) = A_{21}$

$$0 = \begin{vmatrix} A_{11} - \omega^2 & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{vmatrix}$$

Les valeurs de ω qui vérifient ces équations sont celles qui annulent le déterminant de la matrice A donc

$(A_{11} - \omega^2)(A_{22} - \omega^2) - A_{12} A_{21} = 0$

$\omega^4 - (A_{11} + A_{22})\,\omega^2 - A_{12} A_{21} + A_{11} A_{22} = 0$

$\omega_1^2 = (A_{11} + A_{22})/2 - ((A_{11} - A_{22})^2/4) + A_{12} A_{21})^{1/2}$

$\omega_2^2 = (A_{11} + A_{22})/2 + ((A_{11} - A_{22})^2/4) + A_{12} A_{21})^{1/2}$

$\boldsymbol{\omega_1^2 = (g/l_1 + g/l_2 + k\, l^2/(m_1 l_1^2) + k\, l^2/(m_2 l_2^2))/2 - ((g/l_1 - g/l_2 + k\, l^2/(m_1 l_1^2) - k\, l^2/(m_2 l_2^2))^2/4 + k^2 l^4/(m_1 m_2 l_1^2 l_2^2))^{1/2}}$

$\boldsymbol{\omega_2^2 = (g/l_1 + g/l_2 + k\, l^2/(m_1 l_1^2) + k\, l^2/(m_2 l_2^2))/2 + ((g/l_1 - g/l_2 + k\, l^2/(m_1 l_1^2) - k\, l^2/(m_2 l_2^2))^2/4 + k^2 l^4/(m_1 m_2 l_1^2 l_2^2))^{1/2}}$

avec $a_1/a_2 = A_{12}/(\omega^2 - A_{11})$ pour chaque mode

3.3. Cas de l'oscillateur symétrique

Oscillateur symétrique : $m_1 = m_2 = m$ et $l_1 = l_2 = l_0$ $\quad\omega_0 = (g/l_0)^{1/2}$ est la pulsation propre commune des deux pendules isolés

$\omega_1^2 = g/l_0 + k\, l^2/(ml_0^2) - k\, l^2/(ml_0^2) = g/l_0 = \omega_0^2$

$a_1/a_2 = -k\, l^2/(ml_0^2) / (g/l_0 - g/l_0 - k\, l^2/(ml_0^2)) = 1 \quad a_1 = a_2$

$\boldsymbol{\omega_1 = \omega_0}$ **et** $\boldsymbol{a_1 = a_2}$ Les deux pendules oscillent avec la même amplitude à leur propre fréquence. Le ressort de couplage reste non tendu, il n'a aucun rôle.

$\omega_2^2 = g/l_0 + k\, l^2/(ml_0^2) + k\, l^2/(ml_0^2) = g/l_0 + 2\, k\, l^2/(ml_0^2) = \omega_0^2 + 2\, k\, l^2/(ml_0^2)$

$a_1/a_2 = -k\, l^2/(ml_0^2) / (g/l_0 + 2\, k\, l^2/(ml_0^2) - g/l_0 - k\, l^2/(ml_0^2)) = -1 \quad a_1 = -a_2$

$\boldsymbol{\omega_2 = (\omega_0^2 + 2k\, l^2/(ml_0^2))^{1/2}}$ **et** $\boldsymbol{a_1 = -a_2}$ Les deux pendules oscillent avec la même amplitude, mais en opposition de phase. Le ressort intermédiaire ajoute une force qui diminue la période d'oscillation de chaque pendule.

3.4. Solution générale

la solution générale est une combinaison linéaire des deux modes

$\boldsymbol{\theta_1 = A_1 \exp(i\omega_1 t) + B_1 \exp(i\omega_2 t)}$

$\boldsymbol{\theta_2 = A_2 \exp(i\omega_1 t) + B_2 \exp(i\omega_2 t)}$ $\qquad A_1/A_2 = A_{12}/(\omega_1^2 - A_{11})$

$B_1/B_2 = A_{12}/(\omega_2^2 - A_{11})$

4. Battements de l'oscillateur symétrique.

$\theta_1 = A_1 \exp(i\omega_1 t) + B_1 \exp(i\omega_2 t)$

$\theta_2 = A_2 \exp(i\omega_1 t) + B_2 \exp(i\omega_2 t)$

pour simplifier les calculs, on prend un cas particulier simple de l'oscillateur symétrique :

Les deux pendules sont identiques ($A_1 = A_2 \quad B_1 = -B_2$) et à $t = 0$, $\theta_1 = \theta_{1max}$ et $\theta_2 = 0$.

Alors $A_1 = B_1 \qquad A_2 = -B_2$

On pose : $A_1 = A_2 = B_1 = -B_2 = A/2$

$\theta_1 = A/2\, (\exp(i\omega_1 t) + \exp(i\omega_2 t))$

$\theta_1 = A/2 \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\ t)\, (\exp(-i\, (\omega_2 - \omega_1)/2\ t) + \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$

$\theta_1 = A \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\ t)$

On prend la partie réelle, on obtient :

$\boldsymbol{\theta_1 = A \cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t) \cos((\omega_1 + \omega_2)/2\ t)}$

$\theta_2 = A/2\, (\exp(i\omega_1 t) - \exp(i\omega_2 t)) = A \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\ t)\, (\exp(-i\, (\omega_2 - \omega_1)/2\ t) - \exp(i(\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$

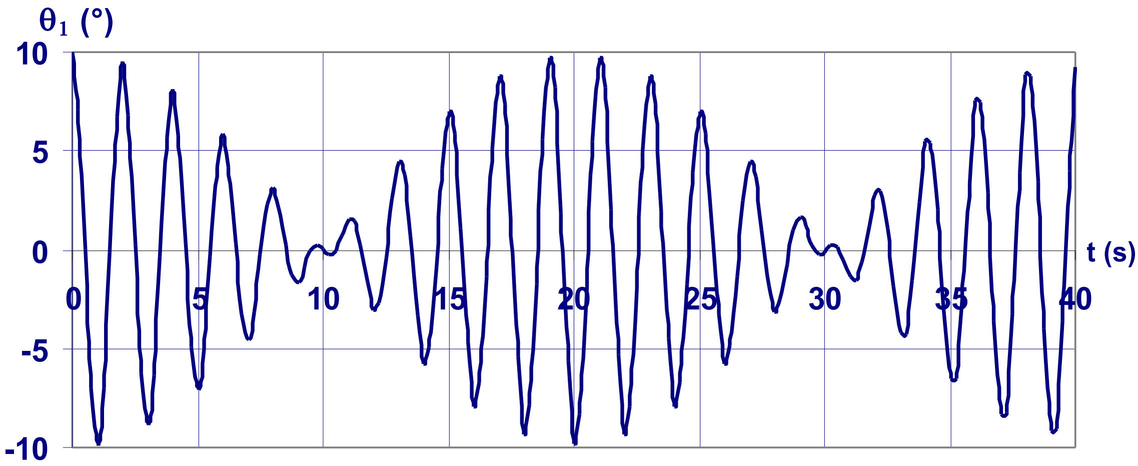
$\theta_2 = -i\, A \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t) = A \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\, t) \exp(i\, (\omega_1 + \omega_2)/2\, t - \pi/2)$

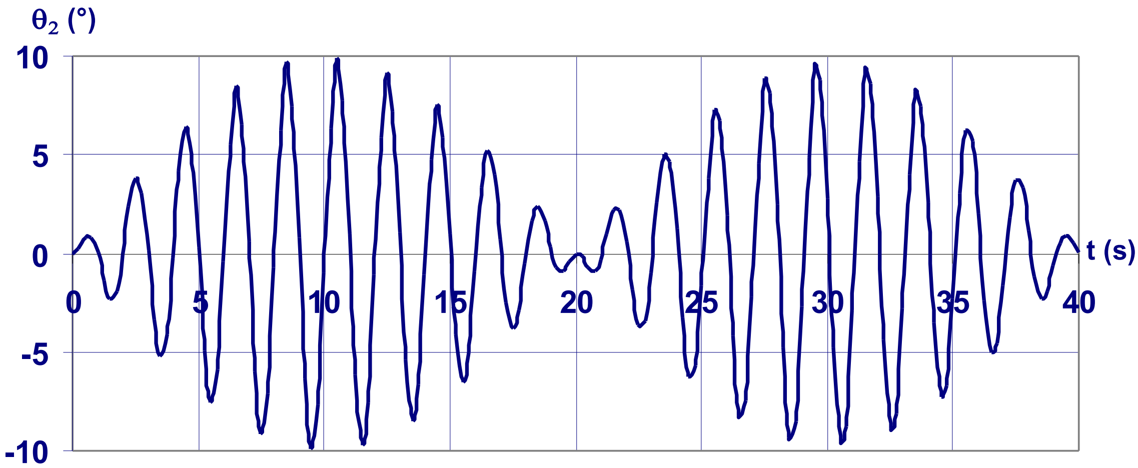
On prend la partie réelle, on obtient :

$\boldsymbol{\theta_2 = A \sin((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)\ \sin((\omega_1 + \omega_2)/2\ t)}$

Ces deux mouvements correspondent à des battements, l'amplitude de chaque oscillateur passe alternativement par des maxima puis par des minima nuls. Le maximum de l'un correspond au minimum de l'autre. Les deux oscillateurs s'échangent leur énergie mécanique à la période

$\boldsymbol{T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)}$ **C'est la période des battements**





Pour l'oscillateur symétrique, on a : $\omega_2 - \omega_1 = (\omega_0^2 + 2kl^2/(ml_0^2))^{1/2} - \omega_0$.

Si $kl^2/(ml_0^2) << \omega_0^2$ (faible couplage), alors

$\omega_2 - \omega_1 \simeq \omega_0(1 + kl^2/(ml_0^2\omega_0^2)) - \omega_0 = k\, l^2/(ml_0^2\omega_0)$

$T_b \simeq 2\pi\, m\, l_0^2\, \omega_0/(k\, l^2)$

Remarque : On pourrait penser que T_b devrait valoir $2\pi/((\omega_2 - \omega_1)/2) = 4\pi/(\omega_2 - \omega_1)$, car c'est la période de $\cos((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$ et de $\sin((\omega_2 - \omega_1)/2\ t)$, mais en réalité que le cosinus (ou le sinus) vaille 1 ou -1 , cela correspond dans les deux cas à un maximum d'amplitude donc la période des battements (temps qui sépare deux passages par un maximum de l'amplitude) ne vaut que la moitié et on a bien :

$T_b = 2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$

Dans le cas général, on a toujours des battements avec la même période, mais les minima ne sont pas nuls. Les deux cas limites sont les deux modes ou le mouvement des deux oscillateurs est parfaitement sinusoïdal, les minima et les maxima sont égaux, on n'a plus de battements du tout.

5. Mouvement forcé pour les petits angles.

5.1 Équation différentielle

Le pendule 1 oscille à la pulsation ω et le pendule 2 réagit à cette excitation.

$\theta_1 = \theta_0 \sin \omega t$

$\theta_2'' = - (g/l_2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2))\, \theta_2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2)\ \theta_1$

$\theta_2'' = - (g/l_2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2))\, \theta_2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2)\ \theta_0 \sin \omega t$

5.2 Solution stationnaire

La solution stationnaire est de la forme $\theta = \theta_m \sin \omega t$ on pose $\omega_0^2 = g/l_2$

$- \omega^2 \theta_m \sin \omega t + (\omega_0^2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2))\, \theta_m \sin \omega t = k\, l^2/(m_2 l_2^2)\, \theta_0 \sin \omega t$

$\theta_m = k\, l^2/(m_2 l_2^2)\, \theta_0/(\omega_0^2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2) - \omega^2)$

$$\boldsymbol{\theta_2 = k\, l^2/(m_2 l_2^2) /(\omega_0^2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2) - \omega^2)\ \theta_0 \sin \omega t}$$

C'est une équation de résonance sans frottement. Le système entre en résonance pour ω voisin de $\omega_0 + k\, l^2/(m_2 l_2^2)$. C'est une particularité par rapport aux résonateurs classiques ou la résonance apparaît pour ω voisin de ω_0, ici, si on excite le pendule avec une fréquence égale à sa fréquence propre, il n'entre pas en résonance maximale, on a seulement $\theta_2 = \theta_1$, les deux pendules oscillent en phase avec la même amplitude donc le ressort n'a alors plus aucune action et il ne peut plus augmenter l'amplitude du résonateur.

Si on veut tenir compte du frottement, on peut ajouter un terme de frottement laminaire $\gamma\, \theta_2'$, on a alors :

$\theta_2'' + \gamma\, \theta_2' + (\omega_0^2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2))\, \theta_2 = k\, l^2/(m_2 l_2^2)\ \theta_0 \sin \omega t$ dont la solution stationnaire est

$\theta_2 = \theta_m \sin(\omega t - \varphi)$ avec $\boldsymbol{\theta_m = k\, l^2/(m_2 l_2^2) /((\omega_0^2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2) - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)^{1/2}}$ **et**

$\boldsymbol{\tan \varphi = \gamma\omega/(\omega_0^2 + k\, l^2/(m_2 l_2^2) - \omega^2)}$

Naturellement, si θ_m devient grand, la théorie simplifiée des petits angles cesse d'être valable...