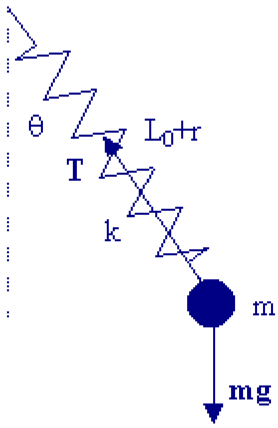
Pendule élastique dansant

par Gilbert Gastebois

Tout élève qui a mesuré la période d'un pendule élastique a été confronté à un problème irritant : Pour certaine valeur de la masse accrochée au pendule et malgré tout le soin mis à le faire osciller verticalement, le pendule se met à balancer de droite à gauche avant de revenir à la verticale, puis à se remettre à balancer et ainsi de suite. On interprète souvent ce phénomène par un couplage entre l'oscillation verticale et latérale qui se traduirait par des battements, mais si c'était le cas, cela devrait toujours exister car les deux périodes sont toujours assez proches, or le phénomène n'existe que pour des masses voisines de la valeur qui donne une fréquence verticale double de la fréquence latérale ($m = k L_0/(3 g)$)

1. Notations



Les vecteurs sont notés en gras

L_0 Longueur propre du pendule, ressort non tendu
k Raideur du ressort
r Allongement du ressort
$L = L_0 + r$ Longueur du pendule de masse m
$v_r = dr/dt$ Vitesse relative de la masse m dans un repère tournant avec le pendule.
$T = k r$ Tension sur la masse m
θ Élongation angulaire du pendule
$\omega = d\theta/dt = \theta'$
df/dt est notée f ' et d²f/dt² est notée f ''

2. Étude du mouvement vertical.

Si θ = 0, on a un mouvement harmonique simple.
$m\,\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\,\mathbf{g}$
On projette sur un axe vertical pointant vers le bas
$m a = m r'' = - k r + m g$
$\mathbf{r'' + k/m\ \ r = g}$
La solution est sinusoïdale : $r = r_m \sin(\omega_0 t + \varphi) + mg/k$ avec $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$
et $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(m/k)^{1/2}$
La masse oscille autour de sa position d'équilibre r_0 pour laquelle $T = mg = k r_0$ donc $r_0 = mg/k$

S'il y a un frottement fluide : $\mathbf{f} = - h\,\mathbf{v}$
$m\,\mathbf{a} = \mathbf{T} + m\,\mathbf{g} + \mathbf{f}$
La projection sur l'axe vertical pointant vers le bas donne
$m a = m r'' = - k r + m g - h r'$
$m r'' + h r' + k r = m g$ En posant $\gamma = h/m$ $\omega_0^2 = k/m$ et $x = r - mg/k$
$$\boldsymbol{x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = 0}$$

La solution est pseudo-périodique ou apériodique selon la valeur de γ (Solution de l'équation : Cliquer ici)
La masse finit par se stabiliser à sa position d'équilibre r_0 pour laquelle $T = mg = k\, r_0$ donc $r_0 = mg/k$

Rq : Pour un pendule incliné d'un angle α /verticale, g est simplement remplacé par $g \cos(\alpha)$

3. Équations différentielles du mouvement général sans frottement.

3.1 Approche Newtonienne

Équation de Newton pour le mouvement tangentiel de la masse m :

Première méthode : Équation de Newton : $\mathbf{d(J\omega)/dt = \Sigma\, M_F}$

$\mathbf{d(J\theta')/dt = M_{mg} + M_T}$

$d(J\theta')/dt = - mg\, L \sin\theta + 0$ (T passe par l'axe donc son moment est nul)

$J\theta'' + J'\theta' = - mg\, L \sin\theta$

$m\, L^2\, \theta'' + 2\, m\, L\, L'\theta' = - mg\, L \sin\theta$

$\mathbf{\theta'' = - g/L \sin\theta - 2\, L'\theta'/L = - g/(L_0 + r) \sin\theta - 2\, r'\theta' /(L_0 + r)}$

Deuxième méthode : On se place dans un repère tournant avec la masse m. Ce repère étant non galiléen, on a :

$m\, \mathbf{a_r} = \mathbf{\Sigma\, F} - m\, \mathbf{a_e} - m\, \mathbf{a_c}$ ($\mathbf{a_c}$ accélération de Coriolis (tangentielle) $a_c = 2\, L'\theta'$ et $\mathbf{a_e}$ accélération centrifuge (radiale)

$m\, \mathbf{a_r} = \mathbf{T} + m\, \mathbf{g} - m\, \mathbf{a_e} - m\, \mathbf{a_c}$

On la projette sur un axe tangent, on obtient : ($a_\theta = L\, \theta''$)

$m\, L\, \theta'' = 0 - m\, g \sin\theta + 0 - 2\, m\, L'\theta'$ (**T** et $\mathbf{a_e}$ étant perpendiculaires à l'axe, leur projection est nulle)

$\mathbf{\theta'' = - g/L \sin\theta - 2\, L'\theta'/L = - g/(L_0 + r) \sin\theta - 2\, r'\theta'/(L_0 + r)}$

Équation de Newton pour le mouvement radial de la masse m :

$m\, \mathbf{a_r} = \mathbf{\Sigma\, F} - m\, \mathbf{a_e} - m\, \mathbf{a_c}$ ($\mathbf{a_c}$ accélération de Coriolis (tangentielle) et $\mathbf{a_e}$ accélération centrifuge (radiale) $a_e = - L\, \theta'^2$)

$m\, \mathbf{a_r} = \mathbf{T} + m\, \mathbf{g} - m\, \mathbf{a_e} - m\, \mathbf{a_c}$

On la projette sur un axe radial partant de l'axe, on obtient : ($a_r = r''$)

$m\, r'' = - k\, r + m\, g \cos\theta + m\, L\, \theta'^2 + 0$ ($\mathbf{a_c}$ est perpendiculaire à l'axe donc sa projection est nulle)

$\mathbf{r'' = - k/m\; r + g \cos\theta + (L_0 + r)\theta'^2}$

3.2 Approche Lagrangienne

Le lagrangien L_g est la différence entre les énergies cinétique et potentielles.

On choisit arbitrairement l'altitude $z = 0$ au niveau de l'axe. L'altitude de m est donc $z = - L \cos\theta$

L'énergie potentielle de pesanteur vaut donc $- m\, g\, L \cos\theta$

L'énergie potentielle du ressort vaut $1/2\, k\, r^2$

Les équations de Lagrange pour un système conservatif sont :

$$\mathbf{d(dL_g/d\theta')/dt \ - \ dL_g/d\theta \ = \ 0}$$
$$\mathbf{d(dL_g/dr')/dt \ - \ dL_g/dr \ = \ 0}$$
$L_g = E_c - E_p = 1/2\ mv^2\ - 1/2\ k\ r^2\ +\ mg\ L\cos\theta\ = 1/2\ m(\ v_\theta^2 + v_r^2\ ) - 1/2\ k\ r^2\ +\ mg\ L\cos\theta$

$v_\theta = L\ \theta' \qquad r\ = L - L_0 \qquad$ donc $\qquad v_r = \ r' = L'$

$$\mathbf{L_g = 1/2\ m(\ L^2\ \theta'^2\ +\ L'^2\ )\ -\ 1/2\ k\ (L - L_0)^2\ +\ mg\ L\cos\theta}$$

$d(dL_g/d\theta')/dt\ -\ dL_g/d\theta\ =\ m\ L^2\ \theta''\ +\ 2\ m\ L\ L'\ \theta'\ +\ mg\ L\sin\theta \qquad r' = L'$

donc

$m\ L^2\ \theta''\ +\ 2\ m\ L\ L'\ \theta'\ +\ mg\ L\sin\theta\ = m\ L^2\ \theta''\ +\ 2\ m\ L\ r'\ \theta'\ +\ mg\ L\sin\theta\ =\ 0$

$$\mathbf{\theta''\ =\ - g/L\ \sin\theta\ - 2\ L'\ \theta'/L\ =\ - g/(L_0 + r)\ \sin\theta\ -\ 2\ r'\theta'/(L_0 + r)}$$

$d(dL_g/dL')/dt\ -\ dLg/dL\ =\ mL'' - m\ L\theta'^2 - k\ (L - L_0) -\ mg\cos\theta$ donc

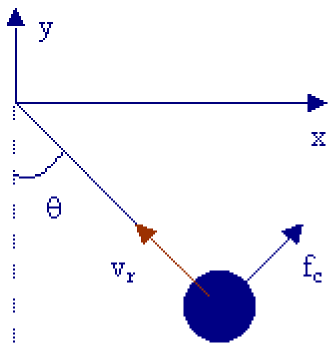
$m\ L''\ -\ m\ L\theta'^2\ +\ k\ (L - L_0)\ -\ mg\cos\theta\ =\ 0$ ou

$m\ r'' -\ m\ (L_0 + r)\ \theta'^2\ +\ k\ r\ -\ mg\cos\theta\ =\ 0$

$$\mathbf{r''\ =\ - k/m\ \ r\ +\ g\cos\theta\ +\ (L_0 + r)\ \theta'^2}$$

Naturellement ces équations n'ont pas de solution analytique. On ne peut obtenir qu'une résolution numérique.

3.3 Analyse physique du mouvement.



Quelle est l'origine de cette amplification, puis de la réduction de la pendulation.... puisque la seule force qui a un moment non nul est le poids, la tension est très variable, mais son moment est nul puisqu'elle passe par l'axe, donc elle n'a aucun rôle dans le mouvement de pendulation. Qui donc fait ainsi varier l'amplitude de pendulation ? C'est la force de Coriolis.

Quand on se place dans un repère lié au pendule, on a un mouvement de rotation global et une vitesse relative radiale, il apparaît alors la pseudo-force $\mathbf{f_c}$ (on a aussi la pseudo-force centrifuge $\mathbf{f_e}$ dont le moment est nul)

$\mathbf{f_c} = 2\ m\ \mathbf{v_r}\ X\ \boldsymbol{\omega}$. $\qquad \mathbf{v_r}$ est radial et $\mathbf{v_r}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$ donc $\mathbf{f_c}$ est tangentiel et vaut :

$f_c = - 2\ m\ v_r\ \theta' \qquad$ (v_r vaut $dL/dt = L'$ donc on retrouve le terme d'amplification

$a_c = 2\ L'\theta'$ ou $\theta_c'' = a_c/L = 2\ L'/L\ \ \theta'$)

Comme f_c est tangentiel, son moment vaut $f_c\ L$ et c'est ce moment qui amplifie ou freine le mouvement.

D'après l'expression du produit vectoriel $\mathbf{v_r}\ X\ \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{f_c}$ est dans le sens du mouvement

(amplification) quand $\mathbf{v_r}$ pointe vers l'axe, donc quand le ressort raccourcit et $\mathbf{f_c}$ est dans en sens inverse du mouvement (freinage) quand $\mathbf{v_r}$ pointe vers l'extérieur, donc quand le ressort se rallonge.
Pour que l'amplitude de pendulation augmente, il faut que f_c soit grande quand elle est motrice et faible quand elle est résistante. Comme f_c dépend de ω, il faut que la masse remonte quand ω est grande donc à chaque fois que le pendule passe par sa position basse. Comme le pendule y passe deux fois par période, il faut que la période élastique soit la moitié de la période de pendulation.
On voit donc qu'on a une amplification seulement si $T_{pend} = 2\ T_{élast}$ (on a la même chose avec <u>la balançoire ou le Botafumeiro</u>)
<u>Remarque :</u> On peut le montrer d'une manière plus mathématique en calculant l'énergie de pendulation acquise par le pendule pendant une oscillation élastique. Cette énergie est égale au travail de la force de Coriolis qui est l'intégrale de $f_c\ v_\theta$ dt
$dW_{fc} = f_c\ v_\theta\ dt = f_c\ L\theta'\ dt = -\ 2\ m\ L\ r'\ \theta'^2\ dt$ On considère une faible oscillation de manière que L reste quasi constante et que les mouvements soient quasi sinusoïdaux donc $r = r_0 - x_m \sin(\omega_e t)$ et $\theta = \theta_m \sin(\omega_p t)$
$v_r = r' = -\ x_m\omega_e \cos(\omega_e t)$ et $\theta' = \theta_m\ \omega_p \cos(\omega_p t)$
$dW_{fc} = 2\ m\ L\ x_m\ \theta_m^2\ \omega_e\ \omega_p^2 \cos(\omega_e t) \cos^2(\omega_p t)\ dt$
$dW_{fc} = m\ x_m\ \theta_m^2\ \omega_e\ \omega_p^2 \cos(\omega_e t)\ (\ 1 + \cos(2\omega_p t))\ dt$
$dW_{fc} = m\ L\ x_m\ \theta_m^2\ \omega_e\ \omega_p^2\ (\ \cos(\omega_e t) + \cos(\omega_e t) \cos(2\omega_p t))\ dt$
Pour obtenir l'énergie acquise par une oscillation élastique complète, il faut intégrer dW_{fc} sur une période $T_e = 2\pi/\omega_e$
L'intégrale de $\cos(\omega_e t)$ dt sur une période est nulle et celle de $\cos(\omega_e t) \cos(2\omega_p t)$ dt sur une période est toujours très faible sauf si les deux arguments des cosinus sont égaux (ou très proches) auquel cas elle vaut $T_e/2$, donc on a un gain d'énergie important seulement si $\omega_e = 2\omega_p$ donc si : $\mathbf{T_{pend} = 2\ T_{élast}}$ (L'énergie gagnée est alors de $\pi/4\ \ mLx_m\theta_m^2\ \omega_e^2$. On note que si on inverse le signe de v_r, le travail est négatif et la pendulation est freinée)

Pendant que l'amplitude augmente, ω augmente donc la force centrifuge augmente et s'oppose à l'oscillation élastique du pendule jusqu'à ce que cette oscillation disparaisse (il faut bien que l'oscillation élastique diminue à cause de la conservation de l'énergie)
Alors pourquoi, après avoir augmenté, l'oscillation pendulaire diminue-t-elle ?
C'est à cause de la force centrifuge qui arrête l'oscillation élastique pendant une demi-période pendulaire. Quand le ressort se raccourcit à nouveau à l'autre sommet de l'oscillation pendulaire, les deux oscillations pendulaire et élastique se sont déphasées d'une demi-période et alors tout est inversé, la force de Coriolis devient maximale quand le ressort s'allonge et minimale quand il se raccourcit, ce qui donne un freinage global et une disparition de la pendulation. Quand le pendule est revenu à sa position de départ, tout peut repartir.
La diminution de ω s'accompagne d'une diminution de la force centrifuge et donc de l'augmentation de l'oscillation élastique (comme il le faut à cause de la conservation de l'énergie)

Masse donnant lieu à la pendulation :
A l'équilibre, l'allongement du ressort est telle que $mg = T = k(L - L_0)$ donc
$L = L_0 + mg/k$

$T_{pend} = 2\pi(L/g)^{1/2} = 2\pi((L_0 + mg/k)/g)^{1/2}$

$T_{élast} = 2\pi(m/k)^{1/2}$

$T_{pend} = 2\ T_{élast}$ donc il faut que $(L_0 + mg/k)/g = 4\ m/k$

$L_0/g + m/k = 4\ m/k$ donc

$3\ m/k = L_0/g$

$\mathbf{m = k\ L_0/(3g)}$

Amplitude maximale de pendulation :

L'énergie mécanique d'oscillation élastique initiale $E_m = 1/2\ k\ x_m^2$ est transférée à l'oscillation pendulaire.

A son maximum d'amplitude, le ressort a à peu près sa longueur à l'équilibre donc $L_0 + mg/k$

$E_m = 1/2\ k\ x_m^2 = m\ g\ (L_0 + mg/k)(1 - \cos\theta_m)$

Cette expression ne peut être valable que pour des angles assez petits donc pour lesquels $\cos\theta_m = 1 - \theta_m^2/2$

On obtient : $\boldsymbol{\theta_m = (k/(mg(L_0 + mg/k)))^{1/2}\ x_m}$

Comme on a une pendulation seulement si $m = k\ L_0/(3g)$, $mg(L_0 + mg/k) = 4\ k\ L_0^2/9$ donc

$\boldsymbol{\theta_m = 1{,}5\ x_m/L_0}$