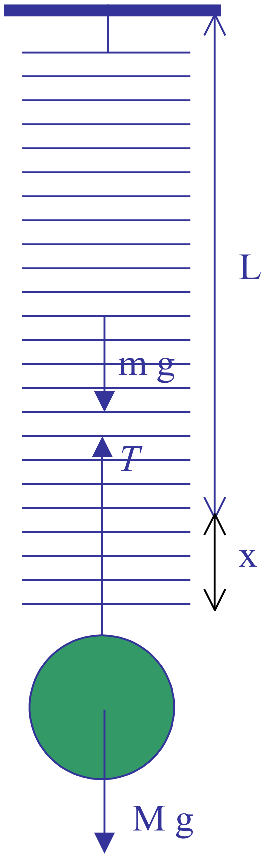
Pendule élastique

par Gilbert Gastebois

1. Notations



Les vecteurs sont notés en gras

L	Longueur propre du pendule, ressort non tendu
k	Raideur du ressort
m	Masse propre du ressort
M	Masse accrochée au ressort
x	Allongement du ressort
v = dx/dt	Vitesse de la masse M.
T = k x	Tension sur la masse M
T	Période du pendule

df/dt est notée f '   et   d²f/dt² est notée f ''

2. Étude du mouvement vertical du pendule de masse m négligeable.

Deuxième équation de Newton pour un mouvement sans frottement.

m **a** = ***T*** + m **g**

On projette sur un axe x vertical pointant vers le bas

m a = m x'' = - k x + m g

x'' + k/m x = g

La solution est sinusoïdale : $x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi) + mg/k$ avec $\omega_0 = (k/m)^{1/2}$

et $\mathbf{T_0 = 2\pi/\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

La masse oscille autour de sa position d'équilibre x_0 pour laquelle $T = mg = k\, x_0$ donc $x_0 = mg/k$

S'il y a un frottement fluide : **f** = - h **v**

m **a** = ***T*** + m **g** + **f**

La projection sur l'axe vertical x pointant vers le bas donne

m a = m x" = - k x + m g - h x'

m x" + h x' + k x = m g En posant γ = h/m $\omega_0{}^2$ = k/m et *x* = x – mg/k

$\boldsymbol{x'' + \gamma x' + \omega_0{}^2 x = 0}$

La solution est pseudo-périodique ou apériodique selon la valeur de γ (Solution de l'équation : Cliquer ici)

Pour le mouvement pseudo-périodique, on trouve une pseudo-période

$$\mathbf{T} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}\right)}}$$

La masse finit par se stabiliser à sa position d'équilibre x_0 pour laquelle *T* = mg = k x_0 donc x_0 = mg/k

Rq : Pour un pendule incliné d'un angle α /verticale, g est simplement remplacé par g cos(α)

3. Effet statique de la masse m du ressort sur son allongement.

On étudie un élément de ressort vertical de longueur dx situé en x, sa raideur est K = k L/dx car la raideur d'un ressort est inversement proportionnelle à sa longueur. En effet pour la même tension, N ressorts identiques bout à bout s'allongeront N fois plus qu'un seul.

A l'équilibre, on a K du = μ x g (μ = m/L est sa masse linéique donc μ x est la masse du ressort située en dessous de x) du = μ x g/K est l'allongement de l'élément dx.

Pour obtenir l'allongement u total, il faut intégrer du pour x allant de 0 à L.

On intègre donc du = m/L g/(kL) x dx de 0 à L, on obtient:

u = $\dfrac{mg}{k\mathrm{L}^2} \displaystyle\int_0^{\mathrm{L}} x\,\mathrm{d}x = \dfrac{mg}{2k}$ donc le ressort s'allonge d'une longueur identique à celle qu'on aurait si on accrochait une masse m/2 à un ressort idéal (sans masse),

Pour calculer l'allongement statique d'un ressort de masse m, il faut ajouter m/2 à la masse M accrochée au ressort.

4. Effet dynamique de la masse du ressort.

4.1 Energie cinétique du ressort de masse m en mouvement.

Soit μ = m/L la masse linéique du ressort

Soit v la vitesse de l'extrémité libre du ressort (en x = L), en x la vitesse sera v_x = v x/L, en effet la vitesse d'une spire du ressort diminue proportionnellement à sa distance à l'extrémité.

L'énergie cinétique d'un élément dx du ressort placé en x sera :

dEc = ½ μ dx v_x^2 = ½ μ dx $v^2 x^2/L^2$ = ½ m v^2/L^3 x^2dx

Pour obtenir Ec, on intègre dEc entre 0 et L, on obtient :

Ec = ½ $\dfrac{m\mathrm{v}^2}{3}$ (C'est l'énergie cinétique qu'aurait une masse m/3 fixée à un ressort idéal)

4.2 Calcul par le Lagrangien

Une masse M est accrochée à un ressort de masse m, elle se déplace à la vitesse v

$Ec_{masse} = \frac{1}{2} M v^2$ et $Ec_{ressort} = \frac{1}{2} (m/3) v^2$

$Ep_{ressort} = \frac{1}{2} k x^2$ et $Ep_{pesanteur} = -(M + m/2) g x$ On prend l'altitude zéro en x = 0

On voit bien que lorsque l'extrémité de ressort se déplace de x, son centre de gravité placé en son milieu ne se déplace que de x/2.

Le lagrangien **L** est la différence entre les énergies cinétiques et potentielles.

$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(M + m/3) x'^2 - \frac{1}{2} k x^2 + (M + m/2) g x$

L'équation de Lagrange pour un système conservatif est : **d(dL/dx')/dt - dL/dx = 0**

$d(d\mathbf{L}/dx')/dt = (M + m/3) x''$

$d\mathbf{L}/dx = -kx + (M + m/2) g$ donc

$\mathbf{(M + m/3) x'' + k x = (M + m/2) g}$ Equation analogue à celle du ressort idéal

La solution est sinusoïdale : $x = x_m \sin(\omega_0 t + \varphi) + (M + m/2)g/k$ avec $\omega_0 = (k/(M + m/3))^{1/2}$

et $\mathbf{T_0 = 2\pi/\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+\dfrac{m}{3}}{k}}$

La masse oscille autour de sa position d'équilibre x_0 pour laquelle $T = (M + m/2)g = k x_0$ donc $x_0 = (M + m/2)g/k$

S'il y a un frottement fluide : **f** = - h **v, on aura**

$\mathbf{(M + m/3) x'' + h x' + k x = (M + m/2) g}$

En posant $\gamma = h/(M + m/3)$ $\omega_0^2 = k/(M + m/3)$ et $\mathit{x} = x - (M + m/2)g/k$

$\boldsymbol{x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = 0}$

La solution est pseudo-périodique ou apériodique selon la valeur de γ (Solution de l'équation : Cliquer ici)

Pour le mouvement pseudo-périodique, on trouve une pseudo-période

$\mathbf{T} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\gamma^2}{4}}}$

La masse finit par se stabiliser en x_0 quand $T = (M + m/2)g = k x_0$ donc $x_0 = (M + m/2)g/k$

Rq : Pour un pendule incliné d'un angle α /verticale, g est simplement remplacé par g cos(α)