Animation

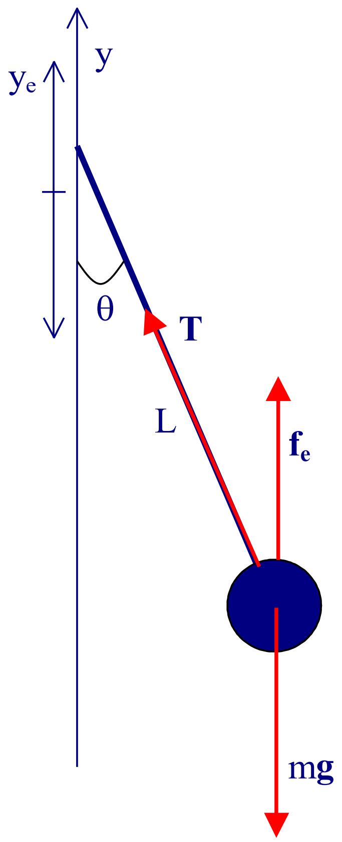
Le pendule pesant forcé

Animation

par Gilbert Gastebois

1. Forçage vertical

1.1 Schéma



On impose à l'axe d'un pendule pesant rigide, un mouvement sinusoïdal vertical d'amplitude Y_e.

$y = Y_e \sin(\omega_e t + \phi)$

L : Longueur du pendule

θ : Amplitude de l'oscillation

mg : Poids du pendule

T : Tension appliquée à la masse

f_e : pseudo-force due à l'accélération de l'axe

1.2 Équation différentielle du pendule.

L'axe du pendule est accéléré avec l'accélération a_e , donc le référentiel n'est pas galiléen. Dans ces conditions, on peut appliquer les équations de Newton, à condition d'ajouter une pseudo-force $f_e = - m\, a_e$ à la masse m

$m\,a + m\,a_e = \Sigma F$ donc on obtient : $m\,a = m\,g + T - m\,a_e$

Le mouvement de l'axe étant sinusoïdal, on a $y = Y_e \sin(\omega_e t + \phi)$

donc $a_e = y'' = - Y_e\, \omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi)$

En passant à l'expression de la loi de Newton pour un système en rotation, on obtient ainsi :

$J\,\theta'' = m\,L^2\,\theta'' = M(m\,g) + M(T) - M(m\,a_e) = M(m\,g) - M(m\,a_e)$ $\quad M(T) = 0$

$M(m\,g) = - m\,g\,L \sin\theta$

$M(m\,a_e) = m\,Y_e\,\omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi)\, L \sin\theta$

$m\,L^2\,\theta'' = - m\,g\,L \sin\theta + m\,Y_e\,\omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi)\, L \sin\theta$

$$\boldsymbol{\theta'' = - (g - Y_e\,\omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi))/L \,\sin\theta}$$

1.3 Solution de l'équation différentielle.

On obtient une équation similaire à celle du pendule pesant avec une accélération de la pesanteur variable.

Cette équation n'a pas de solution analytique.
En général, le mouvement du pendule n'a rien de remarquable, sauf pour ω_e voisin de 2 fois la pulsation propre du pendule : $\omega_e \approx 2\,(g/L)^{1/2}$

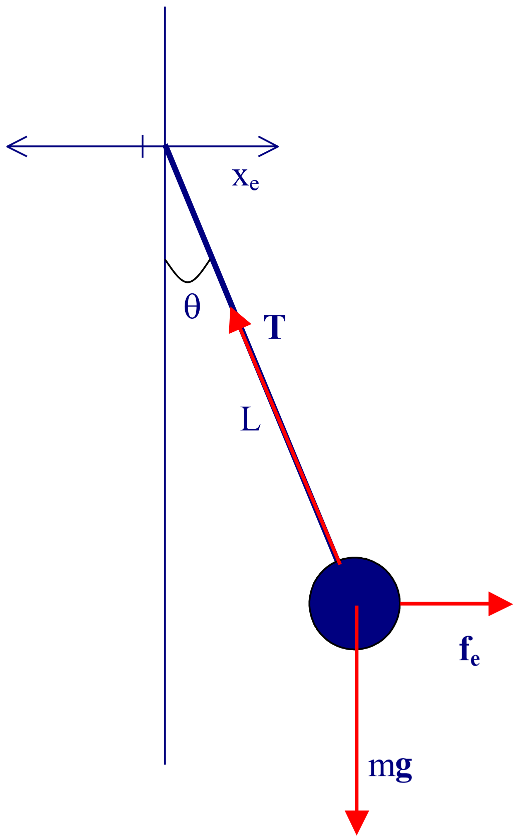
Pour les petites valeurs de Y_e ($Y_e \ll L$), on obtient un mouvement similaire au mouvement d'une balançoire ou du botafumeiro avec une amplitude maximale qui oscille entre 0 et une valeur maximale.

Pour des grandes valeurs de Y_e, on a un mouvement chaotique.

Remarque : La présence d'un frottement fluide ne modifie pas significativement les caractéristiques du mouvement

2. Forçage horizontal

2.1 Schéma



On impose à l'axe d'un pendule pesant rigide, un mouvement sinusoïdal horizontal d'amplitude X_e.

$x = X_e \sin(\omega_e t + \phi)$

L : Longueur du pendule

θ : Amplitude de l'oscillation

mg : Poids du pendule

T : Tension appliquée à la masse

f_e : pseudo-force due à l'accélération de l'axe

2.2 Équation différentielle du pendule.

L'axe du pendule est accéléré avec l'accélération a_e , donc le référentiel n'est pas galiléen. Dans ces conditions, on peut appliquer les équations de Newton, à condition d'ajouter une pseudo-force $f_e = -\,m\,a_e$ à la masse m

$m\,a + m\,a_e = \Sigma F$ donc on obtient : $m\,a = m\,g + T - m\,a_e$

Le mouvement de l'axe étant sinusoïdal, on a $x = X_e \sin(\omega_e t + \phi)$

donc $a_e = x'' = - X_e \omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi)$

En passant à l'expression de la loi de Newton pour un système en rotation, on obtient ainsi :

$J \theta'' = m L^2 \theta'' = M(m g) + M(T) - M(m a_e) = M(m g) - M(m a_e)$ $\quad M(T) = 0$

$M(m g) = - m g L \sin\theta$

$M(m a_e) = m X_e \omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi) L \cos\theta$

$m L^2 \theta'' = - m g L \sin\theta + m X_e \omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi) L \cos\theta$

$$\boldsymbol{\theta'' = - g/L \sin\theta + X_e \omega_e^2 \sin(\omega_e t + \phi)/L \cos\theta}$$

2.3 Solution de l'équation différentielle pour les petits angles.

Tant que θ est petit, on a $\sin\theta \simeq \theta$ et $\cos\theta \simeq 1$ donc

$$\boldsymbol{\theta'' + g/L \ \theta = X_e \omega_e^2/L \sin(\omega_e t + \phi)}$$

Equation classique de l'oscillateur harmonique forcé sinusoïdalement

La solution est $\theta = A \sin(\omega_e t)$

On remplace dans l'équation, on obtient :

$- A \omega_e^2 \sin(\omega_e t) + g/L\, A \sin(\omega_e t) = X_e \omega_e^2/L \sin(\omega_e t)$ donc

$A = X_e \omega_e^2/(L (g/L - \omega_e^2))$

$$\boldsymbol{\theta = X_e \omega_e^2/(L (g/L - \omega_e^2)) \sin(\omega_e t)}$$

L'amplitude est maximale quand $\boldsymbol{\omega_e \simeq (g/L)^{1/2}}$ pulsation propre du pendule.

Le mouvement ne se stabilise pas car lorsque l'amplitude devient notable, la pulsation propre diminue et le mouvement se désynchronise, on observe alors une diminution de l'amplitude jusqu'à son annulation, puis l'amplitude augmente à nouveau et ainsi de suite.

Pour des grandes valeurs de X_e, on a un mouvement chaotique.

Remarque : La présence d'un frottement fluide ne modifie pas significativement les caractéristiques du mouvement