Animation

Le pendule de Huygens

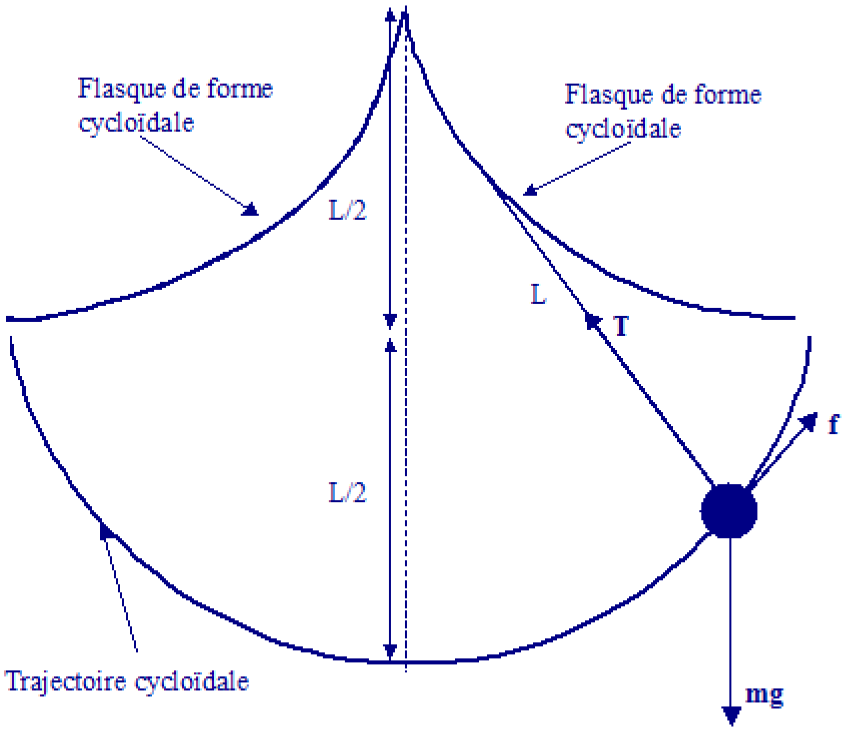
par Gilbert Gastebois

Animation

1. Historique

Huygens cherchait la manière de fabriquer une horloge régulée par un pendule simple. Le problème étant que le pendule n'est pas parfaitement isochrone; la période dépend un peu de l'amplitude. Il proposa de réduire la longueur utile du pendule en fonction de l'amplitude, en utilisant un ruban lié à une masse, le ruban s'enroulant autour de deux flasques symétriques de forme adéquate. L'étude du problème l'amena à montrer que le pendule devenait isochrone s'il parcourait une cycloïde et que pour parcourir une cycloïde, les flasques devaient avoir la même forme que la trajectoire.
Le système ne fut jamais exploité à grande échelle car on peut obtenir l'isochronisme plus simplement en imposant une amplitude constante et faible au pendule ce qui est obtenu par l'échappement à ancre.

2. Schéma

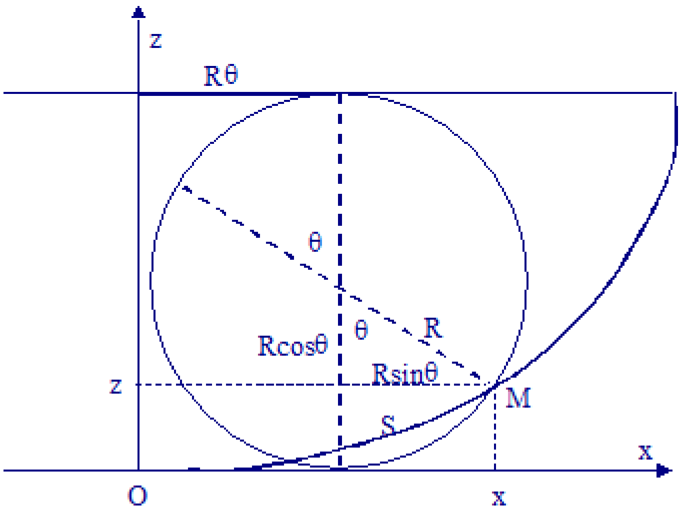


L Longueur du pendule

m Masse du pendule
mg Poids du pendule
T Tension du fil
f Force de frottement fluide sur le pendule

3. Etude du mouvement du pendule cycloïdal

3.1 Équation paramétrique de la cycloïde.



Une cycloïde est la courbe décrite par un point M de la circonférence d'un cercle de rayon R qui roule sans glisser sous une droite horizontale.
On part avec $\theta = 0$ quand le point M est au plus bas de sa trajectoire (à 2R sous la droite).
On prend un repère Oxz centré sur le point d'origine O ($\theta = 0$)
Quand le cercle tourne d'un angle θ, il avance de $R\theta$ et le point M avance de $R\sin\theta$ par rapport au centre du cercle. Le point M a donc avancé de
$x = R\theta + R\sin\theta$
Le point M a monté de
$z = R - R\cos\theta$
$z = R(1 - \cos\theta)$

On note $dS/dt = S'$ et $d^2S/dt^2 = S''$

Soit $S = OM$, la distance parcourue par M sur la courbe.
$dS = (dx^2 + dz^2)^{1/2} = (R^2 + 2R^2\cos\theta + R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta)^{1/2} = (2R^2(1 + \cos\theta))^{1/2}$
$1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$ donc **$dS = 2R\cos(\theta/2)$**
On prend la primitive
$S = 4R\sin(\theta/2)$ (La constante d'intégration est nulle car pour $\theta = 0$, $S = 0$)

Remarque : si $\theta = \pi$ (cela correspond à une demi-arche de la cycloïde), $S = 4R$ donc la longueur de l'arche vaut 8R. Son empattement valant $2\pi R$.

3.2 Équation différentielle du pendule.

L'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p = 1/2\ mv^2 + mgz = 1/2\ m\ S'^2 + mgR(1 - \cos\theta)$
$1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ donc
$E_m = 1/2\ m\ S'^2 + 2mgR\sin^2(\theta/2) = 1/2\ m\ S'^2 + mg\ S^2/(8R)$
D'après Newton,
$dE_m/dt = P_f = -f\ v = -f\ S'$ (P_f est la puissance du frottement)
$m\ S'\ S'' + mg/(4R)\ S\ S' = -f\ S'$
$m\ S'' + mg/(4R)\ S = -f$
On prend un frottement laminaire **$f = m\gamma v = m\gamma S'$**
$m\ S'' + mg/(4R)\ S = -m\gamma S'$ On pose **$g/(4R) = \omega_0^2$**
$S'' + \gamma S' + \omega_0^2 S = 0$

Solution de l'équation : Cliquer ici

4. Mouvement du pendule

4.1 Solution sans frottement ($\gamma = 0$)

Si $\gamma = 0$, alors

$\mathbf{S'' + \omega_0^2 S = 0}$

donc $\mathbf{S = a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)}$

$\mathbf{v = S' = b\,\omega_0 \cos(\omega_0 t) - a\,\omega_0 \sin(\omega_0 t)}$

$\mathbf{T = 2\pi/\omega_0 = 4\pi(R/g)^{1/2}}$ est bien indépendante de l'amplitude

Conditions initiales : A $t = 0$ $S = S_0$ et $v = v_0$

$\mathbf{S = S_0 \cos(\omega_0 t) + v_0/\omega \sin(\omega_0 t)}$

$\mathbf{v = v_0 \cos(\omega_0 t) - \omega_0 S_0 \sin(\omega_0 t)}$

4.2 Solution avec frottement faible ($\gamma < 2\omega_0$)

$\mathbf{S'' + \gamma S' + \omega_0^2 S = 0}$

Solution : $S = e^{-\gamma/2\, t}(a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t))$

Conditions initiales : A $t = 0$ $S = S_0$ et $v = v_0$

On pose $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = \omega$

$\mathbf{S = e^{-\gamma/2\, t}(S_0 \cos(\omega t) + (v_0 + \gamma S_0/2)/\omega \sin(\omega t))}$

$\mathbf{v = e^{-\gamma/2\, t}(v_0 \cos(\omega t) - (\gamma/(2\omega)) (v_0 + \gamma S_0/2) + \omega S_0) \sin(\omega t))}$

Période de l'oscillateur

$\mathbf{T = 2\pi/\omega' = 2\pi/(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}}$ est indépendante de l'amplitude

4.3 Solution avec frottement critique ($\gamma = 2\omega_0$)

$\mathbf{S'' + 2\omega_0 S' + \omega_0^2 S = 0}$

Solution : $S = e^{-\gamma/2\, t}(a + b\,t)$

Conditions initiales : A $t = 0$ $S = S_0$ et $v = v_0$

$\mathbf{S = e^{-\gamma/2\, t}(S_0 + (v_0 + \gamma S_0/2)\, t)}$

$\mathbf{v = e^{-\gamma/2\, t}(v_0 - \gamma/2\, (v_0 + \gamma S_0/2)\, t)}$

4.4 Solution avec frottement fort ($\gamma > 2\,\omega_0$)

$\mathbf{S'' + \gamma S' + \omega_0^2 S = 0}$

On pose $(\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2} = \omega$

Soit $\alpha_1 = -\gamma/2 + \omega$

et $\alpha_2 = -\gamma/2 - \omega$

Solution : $S = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)$

Conditions initiales : A $t = 0$ $S = S_0$ et $v = v_0$

On pose $a = (v_0 - \alpha_2 S_0)/(2\omega)$

et $b = (\alpha_1 S_0 - v_0)/(2\omega)$

$\mathbf{S = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)}$

$\mathbf{v = \alpha_1 a \exp(\alpha_1 t) + \alpha_2 b \exp(\alpha_2 t)}$

5. Pendule simple cycloïdal

Comment fabriquer un pendule simple dont la masse ait un mouvement cycloïdal ?
La réponse est géométrique. Le pendule en s'appuyant sur les flasques leur est en permanence tangent. De plus le fil est toujours perpendiculaire à la trajectoire car la masse décrit en quelque sorte un cercle de rayon variable. Dans ces conditions, la flasque représente la courbe qui est toujours tangente à la normale de la trajectoire.
Cette courbe s'appelle la developpée de la trajectoire. Il se trouve que la développée d'une cycloïde est une cycloïde identique, mais décalée d'une demi arche vers la droite (ou vers la gauche) et de la hauteur de l'arche vers le haut.
Pour obtenir une trajectoire cycloïdale, il faut donc que les flasques soient cycloïdales avec la même forme que la trajectoire.
L'amplitude maximale du pendule correspond au cas où le pendule atteint le pied de l'arche de la cycloïde. A ce moment, le fil s'appuie entièrement sur la flasque, donc la longueur de la demi-arche vaut L (longueur du pendule). En conséquence $L = 4R$ et la longueur de la trajectoire vaut alors 2L.
La période du pendule est alors indépendante de l'amplitude et vaut

$\mathbf{T = 4\pi(R/g)^{1/2}} = \mathbf{2\pi(L/g)^{1/2}}$ qui est bien la période d'un pendule simple pour une amplitude très faible.... c'est rassurant.