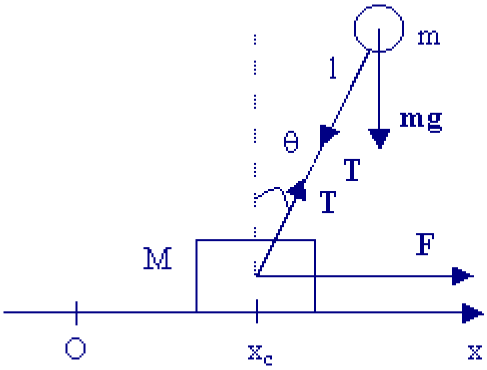
Pendule inversé et pendule elliptique

par Gilbert Gastebois

1.Pendule inversé

1.1. Schéma



Le chariot de masse M glisse sans frottement sur l'axe des x
Un pendule de masse m et de longueur l lui est fixé
On applique une force F au chariot de manière à maintenir le pendule au dessus du chariot

Notations :
Pendule :
$d\theta/dt = \theta'$ et $d^2\theta/dt^2 = \theta''$

Chariot :
$dx/dt = x'$ et $d^2x/dt^2 = x''$

1.2. Équations différentielles du mouvement

1.2.1. Approche Newtonienne.

Équations de Newton pour le pendule

Soit a_r l'accélération relativement à l'axe du pendule et a_c l'accélération de l'axe, on a :

$m(\mathbf{a_r} + \mathbf{a_c}) = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$

On projette le long du pendule :

$m(l\theta'^2 - x''\sin\theta) = T + mg\cos\theta$

donc $T = m\,l\theta'^2 - m\,x''\sin\theta - mg\cos\theta$ (Relation 0)

$\mathbf{J\,d^2\theta/dt^2 = M_{mg} + M_T - M_{mac}}$

$m\,l^2\theta'' = mgl\sin\theta + 0 - mx''\cos\theta\, l$

$\mathbf{l\theta'' = g\sin\theta - x''\cos\theta}$ **(Relation 1)**

Équation de Newton pour le chariot

$M\,\mathbf{a} = \mathbf{T} + \mathbf{F} + M\mathbf{g} + \mathbf{R_N} = \mathbf{T} + \mathbf{F}$

On projette le long du pendule :

$M\,x'' = T\sin\theta + F$, on remplace T par sa valeur (relation 0)

$M\,x'' = m\,l\theta'^2\sin\theta - m\,x''\sin^2\theta - mg\cos\theta\sin\theta + F$

D'après (2) , $mg\sin\theta = m\,l\theta'' + m\,x''\cos\theta$, donc

$M\,x'' = m\,l\theta'^2\sin\theta - mx''\sin^2\theta - m\,l\theta''\cos\theta - mx''\cos^2\theta + F = m\,l\theta'^2\sin\theta - mx'' - m\,l\theta''\cos\theta + F$

$\mathbf{(M + m)\,x'' = m\,l\theta'^2\sin\theta - m\,l\theta''\cos\theta + F}$ **(Relation 2)**

On remplace x'' dans la relation 1 :

$(M + m)\,l\theta'' = (M + m)\,g\sin\theta - m\,l\theta'^2\sin\theta\cos\theta + m\,l\theta''\cos^2\theta - F\cos\theta$

$(M + m\sin^2\theta)\,l\theta'' = (M + m)\,g\sin\theta - m\,l\theta'^2\sin\theta\cos\theta - F\cos\theta$

$\mathbf{l\theta'' = ((M + m)\,g\sin\theta - m\,l\theta'^2\sin\theta\cos\theta - F\cos\theta)/(M + m\sin^2\theta)}$

On remplace $l\theta''$ dans la relation 2 :

$(M + m)\, x'' = m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, ((M + m)\, g \sin\theta\cos\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta\cos^2\theta - F\cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta) + F$

$(M + m)\, x'' = m\, l\theta'^2 \sin\theta\, (M + m \sin^2\theta) - m\, ((M + m)\, g \sin\theta \cos\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta \cos^2\theta - F\cos^2\theta) + F(M + m \sin^2\theta))/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m)\, x'' = Mm\, l\theta'^2 \sin\theta + m^2 l\theta'^2 \sin^3\theta - m(M + m)\, g \sin\theta \cos\theta + m^2\, l\theta'^2 \sin\theta \cos^2\theta + mF\cos^2\theta + FM + mF \sin^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m)\, x'' = Mm\, l\theta'^2 \sin\theta + m^2 l\theta'^2 \sin\theta - m(M + m)\, g\sin\theta \cos\theta + m\, F + FM)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m)\, x'' = (M + m)(m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, g \sin\theta \cos\theta + F)/(M + m \sin^2\theta)$

$\mathbf{x'' = (m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, g \sin\theta \cos\theta + F)/(M + m \sin^2\theta)}$

1.2.2. Approche Lagrangienne.

$L = Ec - Ep = 1/2\, m\, v^2 + 1/2\, M v_c^2 - mg\, l \cos\theta$ (altitude nulle sur l'axe du pendule)

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (l\theta' \cos\theta + x')^2 + (-l\theta' \sin\theta)^2 = l^2\theta'^2 + x'^2 + 2\, l\, x'\, \theta' \cos\theta$

$L = 1/2\, m\, l^2\theta'^2 + 1/2\, m\, x'^2 + m\, l\, x'\, \theta' \cos\theta + 1/2\, M\, x'^2 - mg\, l \cos\theta$

Formules de Lagrange :

$\mathbf{d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = 0}$

$m\, l^2\theta'' + m\, l\, x'' \cos\theta - m\, l\, x' \sin\theta\, \theta' + m\, l\, x'\, \theta' \sin\theta - mg\, l \sin\theta = 0$ donc

$m\, l^2\theta'' + m\, l\, x'' \cos\theta - mg\, l \sin\theta = 0$

$\mathbf{l\theta'' = g \sin\theta - x''\cos\theta}$ **(Relation 1)**

$\mathbf{d(dL/dx')/dt - dL/dx = F}$

$m\, x'' + m\, l\, \theta'' \cos\theta - m\, l\, \theta'^2 \sin\theta + M\, x'' = F$ donc

$\mathbf{(M + m)\, x'' = m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, l\theta'' \cos\theta + F}$ **(Relation 2)**

On remplace x'' dans la relation 1 :

$(M + m)\, l\theta'' = (M + m)\, g \sin\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta \cos\theta + m\, l\theta'' \cos^2\theta - F\cos\theta$

$(M + m \sin^2\theta)\, l\theta'' = (M + m)\, g \sin\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta \cos\theta - F\cos\theta$

$\mathbf{l\theta'' = ((M + m)\, g \sin\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta \cos\theta - F\cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)}$

On remplace $l\theta''$ dans la relation 2 :

$(M + m)\, x'' = m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, ((M + m)\, g \sin\theta \cos\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta\cos^2\theta - F\cos^2\theta)/(M+m \sin^2\theta) + F$

$(M + m)\, x'' = (m\, l\theta'^2 \sin\theta\, (M + m \sin^2\theta) - m\, ((M + m)\, g \sin\theta \cos\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta \cos^2\theta - F\cos^2\theta) + F(M + m \sin^2\theta))/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m)\, x'' = (Mm\, l\theta'^2 \sin\theta + m^2 l\theta'^2 \sin^3\theta - m(M + m)\, g \sin\theta \cos\theta + m^2\, l\theta'^2 \sin\theta \cos^2\theta + mF \cos^2\theta + FM + mF \sin^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m)\, x'' = (Mm\, l\theta'^2 \sin\theta + m^2 l\theta'^2 \sin\theta - m(M + m)\, g \sin\theta \cos\theta + mF + FM)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m)\, x'' = (M + m)(m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, g \sin\theta \cos\theta + F)/(M + m \sin^2\theta)$

$\mathbf{x'' = (m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, g \sin\theta \cos\theta + F)/(M + m \sin^2\theta)}$

1.2.3. Asservissement du pendule.

Pour maintenir le pendule au dessus du chariot, on peut choisir une force proportionnelle à θ : $F = k\, \theta$, on obtient

$\mathbf{l\theta'' = ((M + m)\, g \sin\theta - m\, l\theta'^2 \sin\theta \cos\theta - k\, \theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)}$

$\mathbf{x'' = (m\, l\theta'^2 \sin\theta - m\, g \sin\theta \cos\theta + k\, \theta)/(M + m \sin^2\theta)}$

Remarque : Une force proportionnelle à $\sin\theta$: $F = k \sin\theta$, fait presque aussi bien...

1.3. Solution pour les petits angles

1.3.1. Équation différentielle.

Pour les petits angles, on prend $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ et on néglige les puissances de θ supérieures à 1

$l\theta'' = ((M + m)\, g\, \theta - k\, \theta - m\, l\theta'^2\theta)/M$

θ est sensiblement sinusoïdal donc $\theta'_{max} = \omega\, \theta_{max}$ et $\theta''_{max} = \omega^2\, \theta_{max}$ donc $\theta'^2\, \theta$ vaut au maximum $\omega^2\, \theta_{max}{}^3$ ce qui est négligeable devant θ_{max} si θ_{max} est petit. On peut donc négliger le dernier terme et on a alors :

$l\theta'' = ((M + m)\, g\, \theta - k\, \theta)/M$ donc

$\theta'' + (k - (M + m)g)/(M\, l)\, \theta = 0$

$x'' = (k - m\, g)/M\, \theta$

1.3.2. Solution de l'équation pour le pendule

$\theta'' + (k - (M + m)g)/(M\, l)\, \theta = 0$ donc

$\theta = \theta_m \cos \omega t$ avec $\omega = ((k - (M + m)g)/(M\, l))^{1/2}$

et de période $T = 2\pi/\omega = 2\pi(M\, l/(k - (M + m)g))^{1/2}$

$T = 2\pi(M\, l/(k - (M + m)g))^{1/2}$

T n'est positive que si $k > (M + m)g$ donc

le pendule ne peut être maintenu que si $k > (M + m)g$ donc si $m < k/g - M$

1.3.3. Solution de l'équation pour le chariot

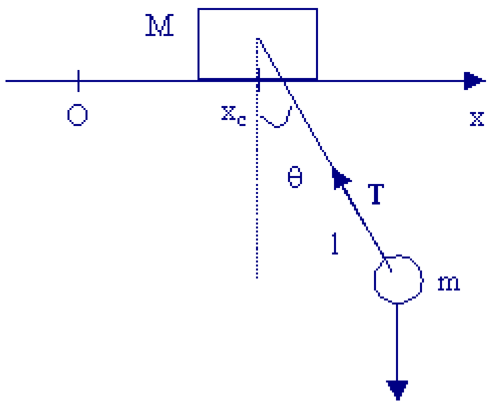
$x'' = (k - m\, g)/M\, \theta = (k - m\, g)/M\, \theta_m \cos \omega t$ donc

$x = -(k - m\, g)/(M\omega^2)\, \theta_m \cos \omega t = -(k - m\, g)/(k - (M + m)g)\, l\, \theta_m \cos \omega t$

$x = -(k - m\, g)/(k - (M + m)g)\, l\, \theta = -(k - m\, g)/(k - (M + m)g)\, l\, \theta_m \cos \omega t$

2.Pendule elliptique

2.1. Schéma



Le chariot de masse M glisse sans frottement sur l'axe des x

Un pendule de masse m et de longueur l lui est fixé

Notations :

Pendule :

$d\theta/dt = \theta'$ et $d^2\theta/dt^2 = \theta''$

Chariot :

$dx/dt = x'$ et $d^2x/dt^2 = x''$

2.2. Équations différentielles du mouvement

2.2.1. Approche Newtonienne.

Équations de Newton pour le pendule

Soit a_r l'accélération relativement à l'axe du pendule et a_c l'accélération de l'axe, on a :

$m (\mathbf{a_r} + \mathbf{a_c}) = \mathbf{T} + m\mathbf{g}$

On projette le long du pendule :

$m (l\theta'^2 - x'' \sin\theta) = T - mg \cos\theta$

donc $T = m l\theta'^2 - m x'' \sin\theta + mg \cos\theta$ (Relation 0)

$J\, d^2\theta/dt^2 = M_{mg} + M_T - M_{mac}$

$m l^2\theta'' = - mgl \sin\theta + 0 - m x''\cos\theta\, l$

$l\theta'' = - g \sin\theta - x''\cos\theta$ (Relation 1)

Équation de Newton pour le chariot

$M \mathbf{a} = \mathbf{T} + M\mathbf{g} + \mathbf{R_N} = \mathbf{T}$

On projette le long du pendule :

$M x'' = T \sin\theta$, on remplace T par sa valeur (relation 0)

$M x'' = m l\theta'^2\sin\theta - m x'' \sin^2\theta + mg \cos\theta \sin\theta$

D'après (2) , $mg \sin\theta = - m l\theta'' - m x''\cos\theta$, donc

$M x'' = m l\theta'^2\sin\theta - m x'' \sin^2\theta - m l\theta'' \cos\theta - m x''\cos^2\theta = m l\theta'^2\sin\theta - m x'' - m l\theta'' \cos\theta$

$(M + m) x'' = m l\theta'^2\sin\theta - m l\theta'' \cos\theta = 0$ (Relation 2)

On remplace x'' dans la relation 1 :

$(M + m) l\theta'' = -(M + m) g \sin\theta - m l\theta'^2\sin\theta \cos\theta + m l\theta'' \cos^2\theta$

$(M + m \sin^2\theta) l\theta'' = - (M + m) g \sin\theta - m l\theta'^2\sin\theta \cos\theta$

$l\theta'' = (- (M + m) g \sin\theta - m l\theta'^2\sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

On remplace lθ'' dans la relation 2 :

$(M + m) x'' = m l\theta'^2\sin\theta - m (-(M + m) g \sin\theta \cos\theta - m l\theta'^2\sin\theta \cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (m l\theta'^2\sin\theta (M + m \sin^2\theta) - m (- (M + m) g \sin\theta \cos\theta - m l\theta'^2\sin\theta \cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (Mm l\theta'^2\sin\theta + m^2l\theta'^2\sin^3\theta + m(M + m) g \sin\theta \cos\theta + m^2 l\theta'^2\sin\theta \cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (Mm l\theta'^2\sin\theta + m^2l\theta'^2\sin\theta + m(M + m) g \sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (M + m)(m l\theta'^2\sin\theta + m g \sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$x'' = (m l\theta'^2\sin\theta + m g \sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

2.2.2. Approche Lagrangienne.

$L = Ec - Ep = 1/2\, m v^2 + 1/2\, Mv_c^{\,2} + mg\, l \cos\theta$ (altitude nulle sur l'axe du pendule)

$v^2 = x_x^{\,2} + v_y^{\,2} = (l\theta'\cos\theta + x')^2 + (- l\theta'\sin\theta)^2 = l^2\theta'^2 + x'^2 + 2\, l\, x'\, \theta' \cos\theta$

$L = 1/2\, m\, l^2\theta'^2 + 1/2\, m\, x'^2 + m\, l\, x'\, \theta' \cos\theta + 1/2\, M\, x'^2 + mg\, l \cos\theta$

Formules de Lagrange :

$d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = 0$

$m\, l^2\theta'' + m\, l\, x'' \cos\theta - m\, l\, x' \sin\theta\, \theta' + m\, l\, x'\, \theta' \sin\theta + mg\, l \sin\theta = 0$ donc

$m\, l^2\theta'' + m\, l\, x'' \cos\theta + mg\, l \sin\theta = 0$

$l\theta'' = - g \sin\theta - x''\cos\theta$ (Relation 1)

$d(dL/dx')/dt - dL/dx = 0$
$m x'' + m l \theta'' \cos\theta - m l \theta'^2 \sin\theta + M x'' = 0$ donc
$(M + m) x'' = m l\theta'^2 \sin\theta - m l\theta'' \cos\theta = 0$ (Relation 2)

On remplace x" dans la relation 1 :
$(M + m) l\theta'' = - (M + m) g \sin\theta - m l\theta'^2 \sin\theta \cos\theta + m l\theta'' \cos^2\theta$

$(M + m \sin^2\theta) l\theta'' = - (M + m) g \sin\theta - m l\theta'^2 \sin\theta \cos\theta$

$l\theta'' = (- (M + m) g \sin\theta - m l\theta'^2 \sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

On remplace lθ" dans la relation 2 :
$(M + m) x'' = m l\theta'^2 \sin\theta - m (- (M + m) g \sin\theta \cos\theta - m l\theta'^2 \sin\theta \cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (m l\theta'^2 \sin\theta (M + m \sin^2\theta) - m (- (M + m) g \sin\theta \cos\theta - m l\theta'^2 \sin\theta \cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (Mm l\theta'^2 \sin\theta + m^2 l\theta'^2 \sin^3\theta + m(M + m) g \sin\theta \cos\theta + m^2 l\theta'^2 \sin\theta \cos^2\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (Mm l\theta'^2 \sin\theta + m^2 l\theta'^2 \sin\theta + m(M + m) g \sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$(M + m) x'' = (M + m)(m l\theta'^2 \sin\theta + m g \sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

$x'' = (m l\theta'^2 \sin\theta + m g \sin\theta \cos\theta)/(M + m \sin^2\theta)$

2.3. Solution pour les petits angles

2.3.1. Équation différentielle.

Pour les petits angles, on prend $\sin\theta = \theta$, $\cos\theta = 1$ et on néglige les puissances de θ supérieures à 1
$l\theta'' = (- (M + m) g \theta - m l\theta'^2 \theta)/M$

θ est sensiblement sinusoïdal donc $\theta'_{max} = \omega \theta_{max}$ et $\theta''_{max} = \omega^2 \theta_{max}$ donc $\theta'^2 \theta$ vaut au maximum $\omega^2 \theta_{max}^3$ ce qui est négligeable devant θ_{max} si θ_{max} est petit. On peut donc négliger le dernier terme et on a alors :

$l\theta'' = - (M + m) g \theta/M$ donc

$\theta'' + (M + m)g /(M l) \theta = 0$

$x'' = m g/M \theta$

2.3.2. Solution de l'équation pour le pendule

$\theta'' + (M + m)g/(M l) \theta = 0$ donc
$\theta = \theta_m \cos \omega t$ avec $\omega = ((M + m)g /(M l))^{1/2}$

et de période $T = 2\pi/\omega = 2\pi (M l/((M + m)g))^{1/2}$

$T = 2\pi(M l/((M + m)g))^{1/2}$

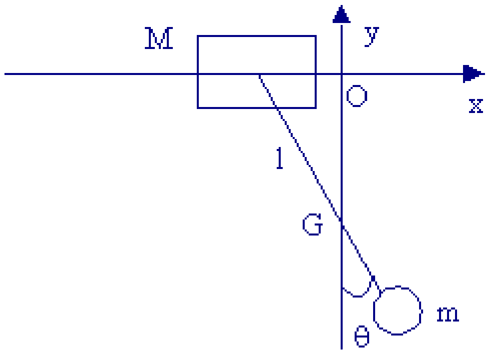
Remarque : Si m<<M, on retrouve la période du pendule simple $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$ car alors, la masse M ne bouge pratiquement pas.

2.3.3. Solution de l'équation pour le chariot

$x'' = m g/M \theta = m g/M \theta_m \cos \omega t$ donc
$x = - m g/(M\omega^2) \theta_m \cos \omega t = - m g/((M + m)g) l \theta_m \cos \omega t$

$x = - m /(M + m) l \theta = - m/(M + m) l \theta_m \cos \omega t$ avec $\omega = ((M + m)g /(M l))^{1/2}$

2.3.4. Trajectoire elliptique du pendule



Soit G le centre de masse de l'ensemble chariot-pendule et C le centre de la masse m du pendule : GC = M l/(M + m)
L'ensemble chariot-pendule ne subit que des forces extérieures verticales **mg**, **Mg** et $\mathbf{R_N}$
donc le centre de gravité de l'ensemble ne se déplace pas horizontalement car il ne subit pas de forces horizontales.
Si on prend un repère Ox passant par le centre du chariot et Oy passant par le centre de masse de l'ensemble, alors le centre C de la masse m a les composantes
$x = GC \sin\theta = M\, l \sin\theta /(M + m)$ et $y = - l \cos\theta$ donc
$\sin^2\theta = x^2/(M\, l /(M + m))^2$ et $\cos^2\theta = y^2/l^2$ donc
$y^2/l^2 + x^2/(M\, l /(M + m))^2 = 1$ Équation d'une ellipse de grand axe l et de petit axe M/(M + m) l centrée sur O
Le centre de masse du pendule se déplace sur une portion de cette ellipse.
G se déplace verticalement sur Oy entre $y = - m/(M + m)\, l \cos\theta_m$ et $y = - m/(M + m)\, l$