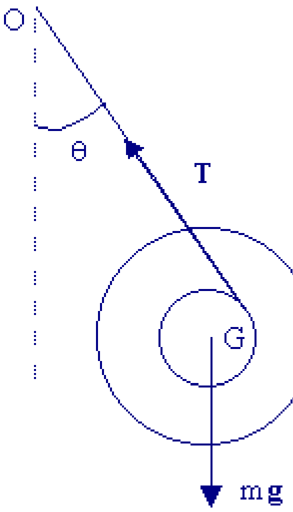
Le pendule de Maxwell

par Gilbert Gastebois

1. Notations

Le pendule de Maxwell est un yo-yo qui oscille.



Les vecteurs sont notés en gras

m Masse du yo-yo

R Rayon externe du yo-yo

r Rayon interne du yo-yo

l = OG Distance de l'axe au centre de gravité du yo-yo

v_r = dl/dt Vitesse radiale du yo-yo

T Tension du fil

J_0 Moment d'inertie du yo-yo par rapport à son axe propre passant par G.

θ Élongation angulaire du yo-yo

θ' = dθ/dt vitesse angulaire d'oscillation

φ Angle de rotation propre du yo-yo

φ' = dφ/dt vitesse angulaire de rotation du yo-yo

df/dt est notée f ' et d²f/dt² est notée f ''

2. Équations différentielles du mouvement sans frottement.

2.1 Approche Newtonienne

Équation de Newton pour le mouvement tangentiel de la masse m :

Équation de Newton : $\mathbf{d(J\theta')/dt = \Sigma M_F}$

$J = J_0 + ml^2$ (Théorème de Koenig)

$d(J\theta')/dt = J d\theta'/dt + \theta' dJ/dt$ donc

$(J_0 + ml^2)\theta'' + 2\,m\,l\,l'\theta' = M_{mg} + M_T$

$(J_0 + ml^2)\theta'' + 2\,m\,l\,l'\theta' = -\,m\,g\,l\sin\theta + 0$ (T passe par l'axe donc son moment est nul)

$(J_0 + ml^2)\theta'' = -\,m\,g\,l\sin\theta - 2\,m\,l\,l'\theta'$

$\mathbf{(J_0 + ml^2)\theta'' = -\,m\,g\,l\sin\theta - 2\,m\,l\,l'\theta'}$

Équation de Newton pour le mouvement radial de la masse m :

Dans les calculs suivants, on se place dans un repère tournant à la vitesse angulaire θ' :

$m\,\mathbf{a_r} = \mathbf{\Sigma F} - m\,\mathbf{a_e} - m\,\mathbf{a_c}$ ($\mathbf{a_c}$ accélération de Coriolis (tangentielle) et $\mathbf{a_e}$ accélération centrifuge (radiale) $a_e = -\,l\,\theta'^2$)

$m\,\mathbf{a_r} = \mathbf{T} + m\,\mathbf{g} - m\,\mathbf{a_e} - m\,\mathbf{a_c}$

On la projette sur un axe radial partant de l'axe, on obtient : ($a_{radial} = l''$)

$m\,l'' = -T + m\,g\cos\theta + m\,l\,\theta'^2 + 0$ ($\mathbf{a_c}$ est perpendiculaire à l'axe donc sa projection est nulle)
$T = mg\cos\theta + m\,l\,\theta'^2 - m\,l''$ (1)

Équation de Newton pour le mouvement de rotation du yo-yo :

Dans les calculs suivants, on se place dans un repère lié à l'axe du yo-yo :
$\mathbf{J_0\,\varphi'' = M_T + M_{mg} + M_{fc} + M_{fe}}$
$J_0\varphi'' = T\,r + 0 + 0 + 0$ (**mg, $\mathbf{f_e}$ et $\mathbf{f_c}$** passent par l'axe de rotation du yo-yo donc leur moment est nul)
Le fil s'enroulant sans glisser, on a $r\,\varphi' = v_r = l'$ donc $\varphi'' = l''/r$
$T = J_0 l''/r^2$ On reporte dans (1)
$\mathbf{(J_0/r^2 + m)\,l'' = mg\cos\theta + m\,l\,\theta'^2}$

2.2 Approche Lagrangienne

Le lagrangien L est la différence entre les énergies cinétique et potentielle.
On choisit arbitrairement l'altitude 0 au niveau de l'axe.
L'altitude de m est donc $-\,l\cos\theta$
Les équations de Lagrange pour un système conservatif sont :
$\mathbf{d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = 0}$
$\mathbf{d(dL/dl')/dt - dL/dl = 0}$
$L = E_c - E_p = 1/2\,m\,l'^2 + 1/2\,(J_0 + ml^2)\theta'^2 + 1/2\,J_0\varphi'^2 + mg\,l\cos\theta =$
$1/2\,m\,l'^2 + 1/2\,(J_0 + ml^2)\theta'^2 + 1/2\,J_0/r^2\,l'^2 + mg\,l\cos\theta =$
$d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = (J_0 + ml^2)\theta'' + 2\,m\,l\,l'\,\theta' + mg\,l\sin\theta = 0$ donc
$\mathbf{(J_0 + ml^2)\theta'' = -\,mg\,l\sin\theta - 2\,m\,l\,l'\,\theta'}$

$d(dL/dl')/dt - dL/dl = m\,l'' + J_0/r^2\,l'' - m\,l\,\theta'^2 - mg\cos\theta = 0$ donc
$\mathbf{(J_0/r^2 + m)\,l'' = mg\cos\theta + m\,l\,\theta'^2}$

Naturellement ces équations fortement non linéaires n'ont pas de solution analytique.
On ne peut obtenir qu'une résolution numérique.

3. Mouvement vertical ou quasi-vertical sans frottement du yo-yo

Si θ et θ' sont très faibles, on a : $(J_0/r^2 + m)\,l'' = mg$
$l'' = mg/(J_0/r^2 + m) = a = \text{cste}$
$l' = a\,t + l_0'$ (l_0' vitesse initiale du yo-yo)
$l = 1/2\,a\,t^2 + l_0'\,t + l_{init}$ (l_{init} longueur initiale du yo-yo)
Pendant la descente : $l_0' = 0$ et $l_{init} = l_0$
$l' = a\,t$
$l = 1/2\,a\,t^2 + l_0$
$l'^2 = 2\,a\,(l - l_0)$
$l'_{max} = (2\,a\,(l_{max} - l_0))^{1/2}$ donc $\varphi'_{max} = l'_{max}/r = (2\,a/r^2\,(l_{max} - l_0))^{1/2}$
$t_{desc} = l'_{max}/a = (2\,(l_{max} - l_0)/a)^{1/2}$
Remarque : Si $m \ll J_0/r^2$ donc $R \gg r$, $a = mgr^2/J_0$ donc $\varphi'_{max} = (2\,mg(l_{max} - l_0)/J_0)^{1/2}$

est indépendante de r.
et $t_{desc} = (2 J_0 (l_{max} - l_0)/(mg))^{1/2}/r$ est inversement proportionnel à r.

Pendant la remontée: $l_0' = - l'_{max}$ et $l_{init} = l_{max}$
$l' = a t - l'_{max}$
$l = 1/2\ a t^2 - l'_{max}\ t + l_{max}$
A la fin de la remontée, $l' = 0$ donc $t_{asc} = l'_{max}/a = t_{desc}$
$l_{final} = 1/2\ l'^2_{max}/a - l'^2_{max}/a + l_{max} = l_{max} - 1/2\ l'^2_{max}/a = l_0$
Le yo-yo remonte à son altitude initiale, ce qui est conforme à la conservation de son énergie mécanique