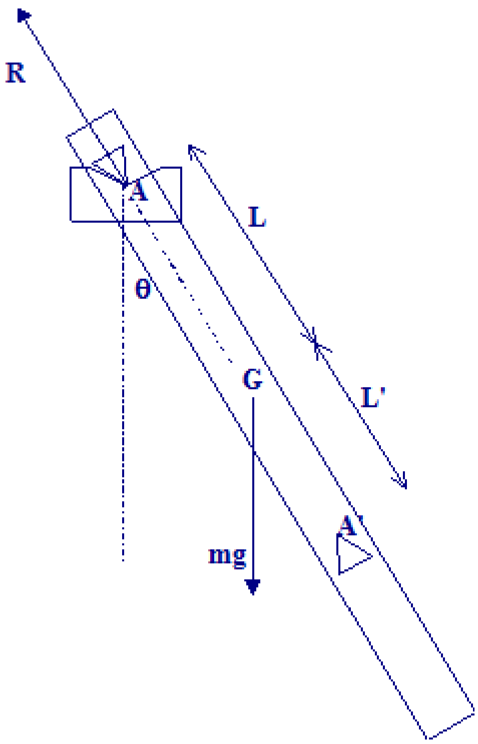
Animation

Le pendule réversible

Animation

par Gilbert Gastebois

1. Schéma et principe du pendule réversible



Un pendule réversible est un pendule pesant qui possède deux axes A et A' placés de telle manière que les périodes par rapport à ces deux axes soient identiques.

Dans ces conditions, la période commune est indépendante de la forme et des moments d'inertie du pendule par rapport aux axes, elle ne dépend que de la distance D = AA' et de l'intensité de la pesanteur g.
La mesure de la période permet donc de déterminer g avec précision.

L   Distance entre A et le centre d'inertie G du pendule
L'   Distance entre A' et le centre d'inertie G du pendule
D = L + L'
m   Masse du pendule
R   Réaction du support
θ   Angle d'inclinaison du pendule

2. Étude du mouvement du pendule sans frottement

2.1 Équation différentielle du mouvement.

Équation de Newton : $\mathbf{J\, d^2\theta/dt^2 = \Sigma\, M_F}$

$\mathbf{J\, d^2\theta/dt^2 = M_{mg} + M_R}$
$J\, d^2\theta/dt^2 = - mg\, L \sin\theta + 0$
$J\, d^2\theta/dt^2 = - mg\, L \sin\theta = - mg\, L \sin\theta$
$d^2\theta/dt^2 = - mg\, L/J \sin\theta$
On pose $mg\, L/J = \omega_0^2$
$\mathbf{d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2 \sin\theta = 0}$

2.2 Équation différentielle pour les petits angles.

Cette équation n'a pas de solution analytique, sa solution est numérique. Cependant, on peut la traiter dans l'approximation des petits angles.
θ petit => $\sin\theta = \theta$
on a alors :
$\mathbf{d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2\, \theta = 0}$

Solution de l'équation : Cliquer ici

2.3 Période du mouvement pour les petits angles.

$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(J/mgL)^{1/2}$

$\mathbf{T_0 = 2\pi(J/mgL)^{1/2}}$

Autour de l'axe A :

$\mathbf{T_A = 2\pi(J/mgL)^{1/2}}$

Autour de l'axe A' :

$\mathbf{T_{A'} = 2\pi(J'/mgL')^{1/2}}$

3. Condition de la réversibilité du pendule

3.1 Calcul de g (très petits angles).

Pour que le pendule soit réversible, il faut que $T_A = T_{A'}$ donc que

$J/mgL = J'/mgL'$

D'après le théorème de Koenig :

$J = J_G + mL^2$

$J' = J_G + mL'^2$ (J_G étant le moment d'inertie du pendule par rapport au centre d'inertie G du pendule)

$(J_G + mL^2)/mgL = (J_G + mL'^2)/mgL'$

$J_G\, mL' + m^2L'L^2 = J_G\, mL + m^2LL'^2$

$mJ_G\, (L - L') = m^2L'L^2 - m^2LL'^2 = m^2LL'(L - L')$

$J_G = mLL'$ On remplace J_G dans l'expression de T_A

$T_A = 2\pi((mLL' + mL^2)/mgL)^{1/2} = 2\pi((L' + L)/g)^{1/2} = 2\pi(D/g)^{1/2}$

$\mathbf{g = 4\pi^2D/T_A{}^2}$

3.2 Détermination de L'

On peut rechercher la position de A' en tâtonnant. C'est très long et fastidieux et finalement peu précis.

Il vaut mieux chercher une position approximative d ou $T_A \sim T_{A'}$ ce qui n'est pas très difficile à trouver, puis calculer la bonne valeur de L'.

On pose $d = L' + e$ ($e << d$)

$T_{A'}{}^2 = 4\pi^2 (mLL' + md^2)/(mgd) = 4\pi^2 (LL' + (L' + e)^2)/(g(L' + e))$

$T_{A'}{}^2 = 4\pi^2 (LL' + L'^2 +2L'e)(1 - e/L')/gL') = T_A{}^2 + 4\pi^2e(L' - L)/(gL')$

$L' \sim d$ donc

$\mathbf{e = g(T_{A'}{}^2 - T_A{}^2)d/(4\pi^2(L -d))}$ $\mathbf{L' = d - e}$

Exemple : $g = 9,81$ m/s² $L = 0,6$ m $d = 0,237$ m $T_A = 1,833$ s $T_{A'} = 1,829$ s

$e = 2,3$ mm donc $L' = 0,2347$ m

3.3 Calcul plus précis de g

Si on veut prendre en compte la dépendance de T avec l'amplitude θ_0, il faut remplacer T_A par $T_A/(1 + \theta_0^2/16)$ donc en tenant compte que θ_0 est petit

$g = 4\pi^2 D(1 + \theta_0^2/8)/T_A^2$

Exemple : g = 9,810 m/s² L = 0,6 m L' = 0,2347 m T_A = 1,836 s θ_0, = 10° (0,174 rd)

Calcul approché : g = 9,775 m/s² (écart de 0,36 %)

Calcul précis : g = 9,812 m/s² (écart de 0,02 %)