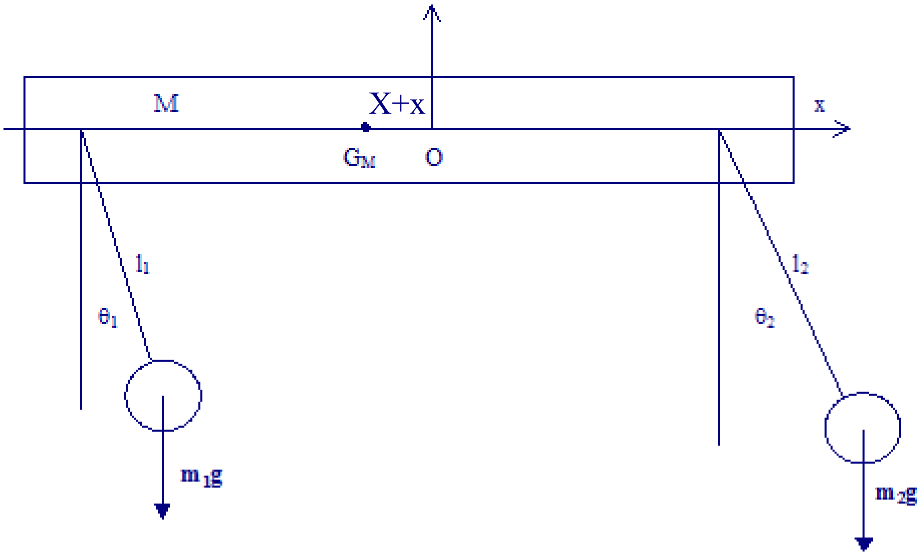
Pendules synchrones

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



Le chariot de masse M glisse sans frottement sur l'axe des x
Deux pendules de masse m_1 et de longueur l_1 et de masse m_2 et de longueur l_2 lui sont fixés.

Bien que les deux pendules aient des périodes propres différentes, pour des angles d'oscillation θ_1 et θ_2 raisonnables, ils oscillent avec la même période moyenne et restent donc synchronisés.

Pour de grands angles d'oscillation, on a un comportement chaotique,

Notations :
Pendules :
$d\theta/dt = \theta'$ et $d^2\theta/dt^2 = \theta''$
Chariot
x : déplacement du centre de gravité du chariot par rapport à sa position à l'équilibre.
$dx/dt = x'$

2. Équations différentielles du mouvement

2.1 Expression de x

Le système dans son ensemble ne subit aucune force horizontale donc la position du centre de gravité G de l'ensemble est fixe. OG = 0

$OG = (M(X + x) + m_1(X_1 + x + l_1 \sin\theta_1) + m_2(X_2 + x + l_2 \sin\theta_2))(M + m_1 + m_2) = 0$

avec $MX + m_1X_1 + m_2X_2 = 0$ (X, X_1 et X_2 sont les abcisses des centres de gravité des masses à l'équilibre)

On pose $m_T = M + m_1 + m_2$

$x = (- m_1l_1 \sin\theta_1 - m_2l_2 \sin\theta_2)/m_T$

$x' = (- m_1l_1 \cos\theta_1\, \theta_1' - m_2l_2 \cos\theta_2\, \theta_2')/m_T$

2.2. Expression du Lagrangien.

$L = Ec - Ep = ½\ m_1 v_1^2 + ½\ m_2 v_2^2 + ½\ Mv_M^2 + m_1g\ l_1 \cos\theta_1 + m_2g\ l_2 \cos\theta_2$ (altitude nulle sur l'axe des pendules)

$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = (l\theta'\cos\theta + x')^2 + (l\theta'\sin\theta)^2 = l^2\theta'^2 + x'^2 + 2\,l\,x'\,\theta'\cos\theta$

$L = ½\ m_1 (l_1^2\theta_1'^2 + x'^2 + 2\,l_1\,x'\,\theta_1'\cos\theta_1) + ½\ m_2 (l_2^2\theta_2'^2 + x'^2 + 2\,l_2\,x'\,\theta_2'\cos\theta_2) + ½\ Mx'^2 + m_1g\ l_1 \cos\theta_1 + m_2g\ l_2 \cos\theta_2$

On remplace x' par sa valeur en fonction de θ_1' et θ_2', on obtient après simplification :

$L = -½ (m_1 l_1 \cos\theta_1 \theta_1' + m_2 l_2 \cos\theta_2 \theta_2')^2/m_T + ½ m_1l_1^2 \theta_1'^2 + ½ m_2l_2^2 \theta_2'^2 + m_1g\ l_1 \cos\theta_1 + m_2g\ l_2 \cos\theta_2$

2.3. Expression des équations

Formules de Lagrange :
$d(dL/d\theta_1')/dt - dL/d\theta_1 = 0$
$d(dL/d\theta_2')/dt - dL/d\theta_2 = 0$

Les calculs des dérivées ne sont pas difficiles, mais ils sont assez longs, aussi, je ne les détaille pas et je donne directement le résultat. On obtient :

$\theta_1'' = (- m_1l_1/m_T \cos\theta_1 \sin\theta_1 \theta_1'^2 - m_2l_2/m_T \cos\theta_1 \sin\theta_2 \theta_2'^2 - g \sin\theta_1 + m_2l_2/m_T \cos\theta_1 \cos\theta_2 \theta_2'')/ (l_1 - m_1l_1/m_T \cos^2\theta_1)$

$\theta_2'' = (- m_2l_2/m_T \cos\theta_2 \sin\theta_2 \theta_2'^2 - m_1l_1/m_T \cos\theta_2 \sin\theta_1 \theta_1'^2 - g \sin\theta_2 + m_1l_1/m_T \cos\theta_2 \cos\theta_1 \theta_1'')/ (l_2 - m_2l_2/m_T \cos^2\theta_2)$

On reporte l'expression de θ_2'' dans θ_1'' et inversement et on trouve :

$\theta_1'' = (- m_1/m_T \cos\theta_1 \sin\theta_1 \theta_1'^2 - m_2l_2/(m_T l_1) \cos\theta_1 \sin\theta_2 \theta_2'^2 - g/l_1 (\sin\theta_1 +$

$m_2/m_T \cos\theta_1 \cos\theta_2 \sin\theta_2 - m_2/m_T \cos^2\theta_2 \sin\theta_1))/(1 - m_2/m_T \cos^2\theta_2 - m_1/m_T \cos^2\theta_1)$

$\theta_2'' = (- m_2/m_T \cos\theta_2 \sin\theta_2 \theta_2'^2 - m_1l_1/(m_T l_2) \cos\theta_2 \sin\theta_1 \theta_1'^2 - g/l_2 (\sin\theta_2 +$

$m_1/m_T \cos\theta_2 \cos\theta_1 \sin\theta_1 - m_1/m_T \cos^2\theta_1 \sin\theta_2))/(1 - m_2/m_T \cos^2\theta_2 - m_1/m_T \cos^2\theta_1)$

Les équations sont hautement non linéaires et leurs solutions numériques sont en général chaotiques.

3. Solution approchée des équations pour les petites oscillations

3.1 Synchronisme des oscillations

Pour de faibles oscillations, on a $\theta << 1$ donc $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = \theta$

θ est sensiblement sinusoïdal donc $\theta'_{max} = \omega\theta_{max}$ et $\theta''_{max} = \omega^2\theta_{max}$ donc $\theta'^2\theta$ vaut au maximum $\omega^2\theta_{max}^3$ ce qui est négligeable devant $\omega^2\theta_{max}$ si θ_{max} est petit donc $\theta'^2\theta << \theta''$. On a donc :

$\theta_1'' + g/l_1 (1 - m_2/m_T)\theta_1 = - g\ m_2/(m_Tl_1)\,\theta_2$

$\theta_2'' + g/l_2 (1 - m_1/m_T)\theta_2 = - g\ m_1/(m_Tl_2)\,\theta_1$

On reconnaît les équations de deux oscillateurs couplés.

Les solutions sont des oscillations synchrones des deux pendules selon deux modes harmoniques de fréquence différente.

La solution générale est la superposition de ces deux modes, ce qui produit des battements. (Cf :Théorie des oscillateurs couplés)

3.2 Modes harmoniques

On cherche une solution sinusoïdale synchrone de faible amplitude.

$\theta_1 = a_1 \sin(\omega t)$ et $\theta_2 = a_2 \sin(\omega t)$ a_1 et $a_2 << 1$

$M/m_T\ \omega^2 = g/l_1 - gm_2/(l_1m_T)) + gm_2/(l_1m_T)\ a_2/a_1 = 0$

$M/m_T\ \omega^2 = g/l_2 - gm_1/(l_2m_T)) + gm_1/(l_2m_T)\ a_1/a_2 = 0$ En simplifiant par g/m_T, on obtient

$m_T/l_1 - m_2/l_1 + m_2/l_1\ a_2/a_1 = m_T/l_2 - m_1/l_2 + m_1/l_2\ a_1/a_2$ donc

$m_2/l_1\ (a_2/a_1)^2 - (M(l_1 - l_2) + m_2l_1 - m_1l_2)\ a_2/a_1 - m_1/l_2 = 0$

$\mathbf{a_2/a_1 = (M(l_1 - l_2) + m_2l_1 - m_1l_2 \pm ((M(l_1 - l_2) + m_2l_1 - m_1l_2)^2 + 4m_1m_2l_1l_2)^{1/2})/(2m_2l_2)}$

(Le signe + donne le mode en phase et le signe – le mode en opposition de phase)

Pour exprimer les deux valeurs de ω, on réécrit les équations un peu différemment

$(- M/m_T\ \omega^2 + g/l_1 - gm_2/(l_1 m_T))\ a_1 + gm_2/(l_1 m_T)\ a_2 = 0$

$gm_1/(l_2 m_T)\ a_1 + (- M/m_T\ \omega^2 + g/l_2 - gm_1/(l_2 m_T))\ a_2 = 0$

Le déterminant doit être nul, donc en developpant m_T et en simplifiant, on obtient :

$Ml_1\ l_2/m_T\ \omega^4 - g(l_1 + l_2 - (m_1l_1 + m_2l_2)/m_T)\ \omega^2 + g^2 = 0$

Equation du second degré dont la solution est :

$\omega^2 = m_T\, g(l_1 + l_2 - (m_1l_1 + m_2l_2)/m_T \pm ((l_1 + l_2 - (m_1l_1 + m_2l_2)/m_T)^2 - 4\,Ml_1\, l_2/m_T)^{1/2})/(2Ml_1\, l_2)$

$\boldsymbol{\omega = (m_T\, g(l_1 + l_2 - (m_1l_1 + m_2l_2)/m_T \pm ((l_1 + l_2 - (m_1l_1 + m_2l_2)/m_T)^2 - 4M\, l_1\, l_2/m_T)^{1/2})/(2Ml_1\, l_2))^{1/2}}$

(Le signe + donne le mode en phase et le signe – le mode en opposition de phase)

La période est donnée par $T = 2\pi/\omega$

Exemple : $M = 3$ kg, $m_1 = m_2 = 1$ kg, $l_1 = 0{,}75$ m, $l_2 = 1$ m

On obtient : $a_2/a_1 = 0{,}5$ et $T = 1{,}42$ s ou

$a_2/a_1 = -1{,}5$ et $T = 1{,}90$ s

Quand on prend $a_1 = 0{,}14$ rd (8°) et $a_2 = 0{,}07$ rd (4 °) et qu'on lance l'animation, on observe que les deux pendules oscillent bien en phase avec une période constante de 1,42 s et si on prend $a_1 = 0{,}1$ rd (6°) et $a_2 = - 0{,}15$ rd (- 9 °), on observe que les deux pendules oscillent bien en opposition de phase avec une période constante de 1,90 s.