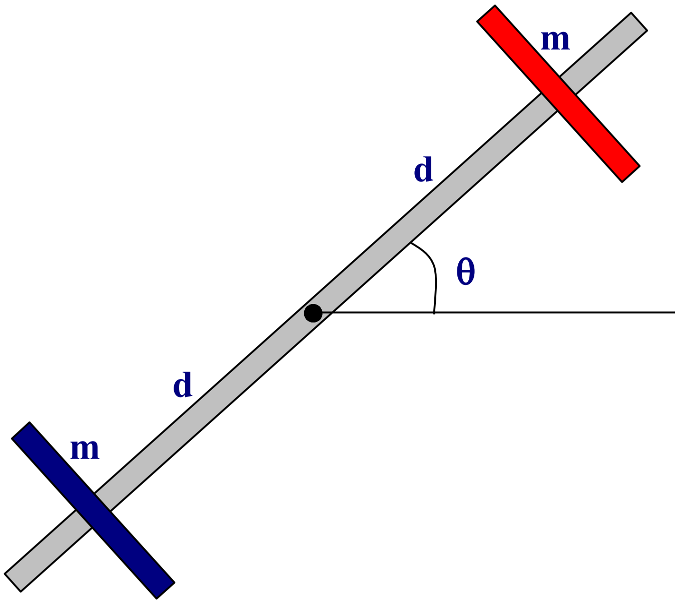
Animation

Le pendule de torsion

par Gilbert Gastebois

Animation

1. Schéma



C constante de torsion du fil

J_0 Moment d'inertie de la tige

L Longueur de la tige

r Rayon de la tige

J Moment d'inertie total

m Masse de chaque disque

R Rayon des disques

e Épaisseur des disques

d distance entre m et l'axe

θ Angle de rotation de la tige = angle de torsion du fil

M = - C θ Moment de rappel exercé par le fil sur le pendule

2. Étude

2.1 Équation différentielle.

2ème loi de Newton en rotation :

$\mathbf{J\,\theta'' = \Sigma\, M_F}$

$J\,\theta'' = - C\,\theta - h\,\theta'$ ($h\,\theta'$ est un frottement visqueux)

$\theta'' + h/J\,\theta' + C/J\,\theta = 0$ On pose $\gamma = h/J$ et $\omega_0 = (C/J)^{1/2}$

$\boldsymbol{\theta'' + \gamma\,\theta' + \omega_0^2\,\theta = 0}$

2.2 Solution de l'équation différentielle.

On cherche une solution du type $\theta = c\,e^{\alpha t}$

$\alpha^2 c\,e^{\alpha t} + \gamma\,\alpha\,c\,e^{\alpha t} + \omega_0^2 c\,e^{\alpha t} = 0$

$\alpha^2 + \gamma\,\alpha + \omega_0^2 = 0$

$\alpha_1 = - \gamma/2 + (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$\alpha_2 = - \gamma/2 - (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$\boldsymbol{\theta = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)}$

2.3 Solution apériodique $\gamma > 2\omega_0$.

$\gamma > 2\omega_0$ donc α_1 et α_2 sont réels.

$\boldsymbol{\theta = a \exp(\alpha_1 t) + b \exp(\alpha_2 t)}$

$\boldsymbol{\theta' = \alpha_1 a \exp(\alpha_1 t) + \alpha 2\, b \exp(\alpha_2 t)}$

Conditions initiales : A t = 0 $\theta = \theta_0$ et $\theta' = \theta'_0$

On pose $\omega' = (\gamma^2/4 - \omega_0^2)^{1/2}$

$\alpha_1 = -\gamma/2 + \omega'$ et $\alpha_2 = -\gamma/2 - \omega'$

$\theta_0 = a + b$

$\theta'_0 = \alpha_1 a + \alpha_2 b$ d'où

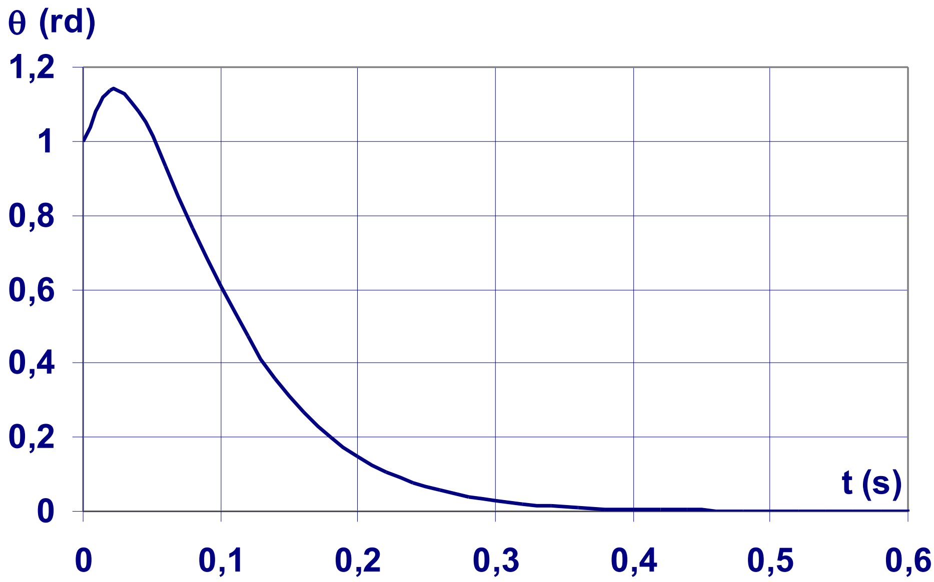
$a = (\alpha_2 \theta_0 - \theta'_0)/(\alpha_2 - \alpha_1) = 0{,}5/\omega' ((\omega' + \gamma/2)\theta_0 + \theta'_0)$

$b = (\alpha_1 \theta_0 - \theta'_0)/(\alpha_1 - \alpha_2) = 0{,}5/\omega' ((\omega' - \gamma/2)\theta_0 - \theta'_0)$

En remplaçant et en développant les équations de θ et θ', on obtient :

$\boldsymbol{\theta = e^{-\gamma/2\, t}(\theta_0\, ch(\omega' t) + (\theta'_0 + \gamma\theta_0/2)/\omega'\, sh(\omega' t))}$

$\boldsymbol{\theta' = e^{-\gamma/2\, t}(\theta'_0\, ch(\omega' t) + (\theta_0(\omega' - \gamma^2/(4\omega')) - \gamma\theta'_0/(2\omega'))\, sh(\omega' t))}$



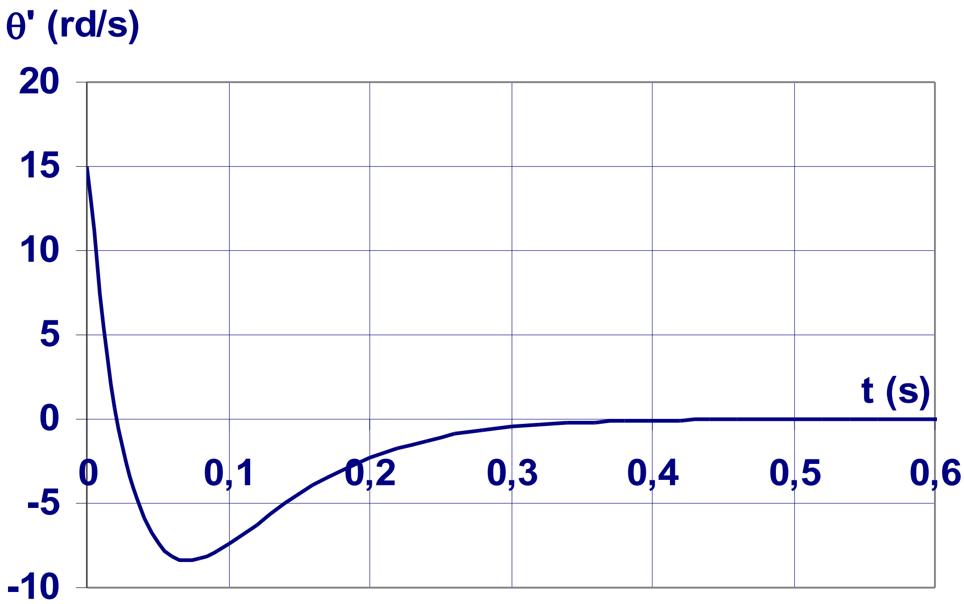
$\theta_0 = 1$ rd

$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 80$ rd/s

$\omega' = 34{,}6$ rd/s



$\theta_0 = 1$ rd

$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 80$ rd/s

$\omega' = 34{,}6$ rd/s

2.4 Solution oscillatoire amortie $\gamma < 2\omega_0$.

$\gamma < 2\omega_0$ donc α_1 et α_2 sont complexes.

$\alpha_1 = - \gamma/2 + j\,(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = - \gamma/2 + j\,\omega'$ (On pose $(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = \omega'$)

$\alpha_2 = - \gamma/2 - j\,(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} = - \gamma/2 - j\,\omega'$

$\theta = a\, e^{-\gamma/2\, t + j\,\omega' t} + b\, e^{-\gamma/2\, t - j\,\omega' t}$

$\theta = e^{-\gamma/2\, t}\,(\, a\, e^{j\,\omega' t} + b\, e^{-j\omega' t})$

$a = a_r + j\, a_i\; b = b_r - j\, b_i$

$\theta = e^{-\gamma/2\, t}(\,(a_r + j\, a_i)\,(\cos(\omega' t) + j\sin(\omega' t)) + (b_r + j\, b_i)(\cos(\omega' t) - j\sin(\omega' t))\,)$

$\theta = e^{-\gamma/2\, t}(\,(a_r + b_r)\,(\cos(\omega' t) + (b_i - a_i)\,(\sin(\omega' t)) + j\,((a_r - b_r)(\sin(\omega' t) + (a_i + b_i)\cos(\omega' t)))$

θ est la partie réelle donc

$\theta = e^{-\gamma/2\, t}(\,(a_r + b_r)\,(\cos(\omega' t) + (b_i - a_i)\,(\sin(\omega' t))$ On pose $a_r + b_r = a$ et $b_i - a_i = b$

$\theta = e^{-\gamma/2\, t}(\, a\cos(\omega' t) + b\sin(\omega' t))$

$\theta' = - \gamma/2\; e^{-\gamma/2\, t}(\, a\cos(\omega' t) + b\sin(\omega' t)) + e^{-\gamma/2\, t}(\, - a\,\omega'\sin(\omega' t) + b\,\omega'\cos(\omega' t))$

$\boldsymbol{\theta' = e^{-\gamma/2\, t}((\, - \gamma/2\; a + b\,\omega'\,)\cos(\omega' t) - (\,\gamma/2\; b + a\,\omega'\,)\sin(\omega' t))}$

Conditions initiales : A $t = 0$ $\theta = \theta_0$ et $\theta' = \theta'_0$

$\theta_0 = a$

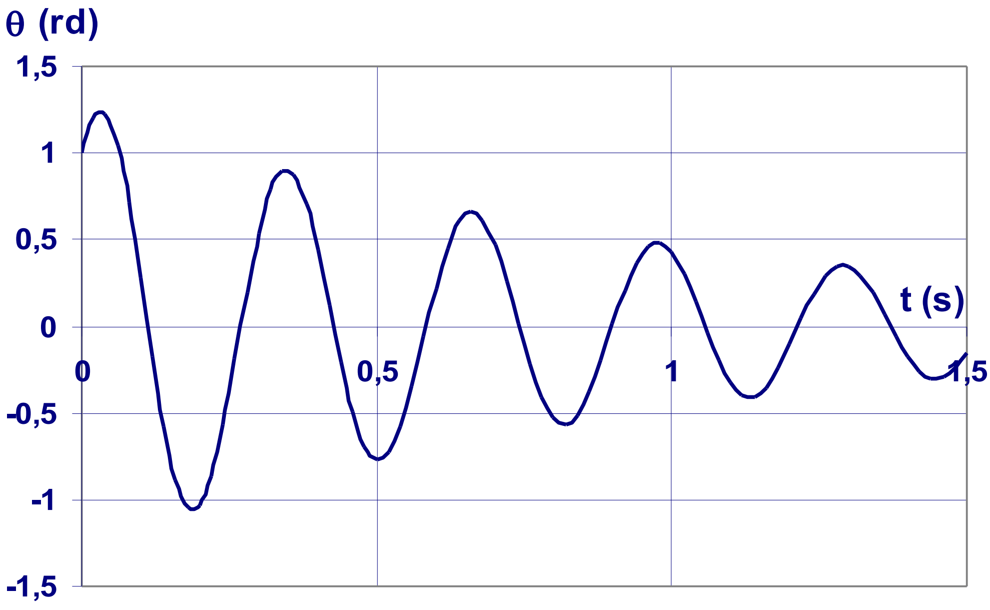
$\theta'_0 = - \gamma/2\; a + b\,\omega'$ donc $b = (\,\theta'_0 + \gamma/2\;\theta_0\,)/\omega'$ On a alors :

$\boldsymbol{\theta = e^{-\gamma/2\, t}(\theta_0\cos(\omega' t) + (\theta'_0 + \gamma\,\theta_0/2)/\omega'\sin(\omega' t))}$

$\boldsymbol{\theta' = e^{-\gamma/2\, t}(\theta'_0\cos(\omega' t) + (\theta_0\,(\omega' - \gamma^2/(4\omega')) - \gamma\,\theta'_0/(2\omega'))\sin(\omega' t))}$

Periode de l'oscillateur

$\boldsymbol{T = 2\pi/\omega' = 2\pi/(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}}$



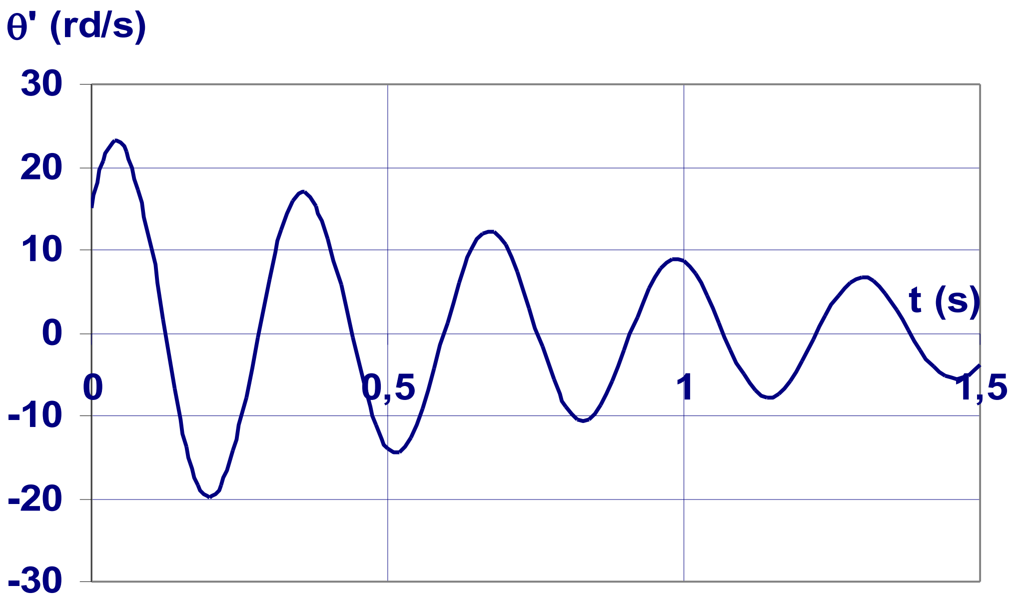
$\theta_0 = 1$ rd

$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 2$ rd/s

$\omega' = 19{,}97$ rd/s



$\theta_0 = 1$ rd

$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 2$ rd/s

$\omega' = 19{,}97$ rd/s

2.5 Solution apériodique critique $\gamma = 2\omega_0$.

$\omega' = \omega_0 - \gamma/2 = 0$ ce qui correspond à $h = 2(C\,J)^{1/2}$

solution oscillante : $\theta = e^{-\gamma/2t}(\theta_0 \cos(\omega' t) + (\theta'_0 + \gamma/2\ \theta_0)/\ \omega' \sin(\omega' t))$

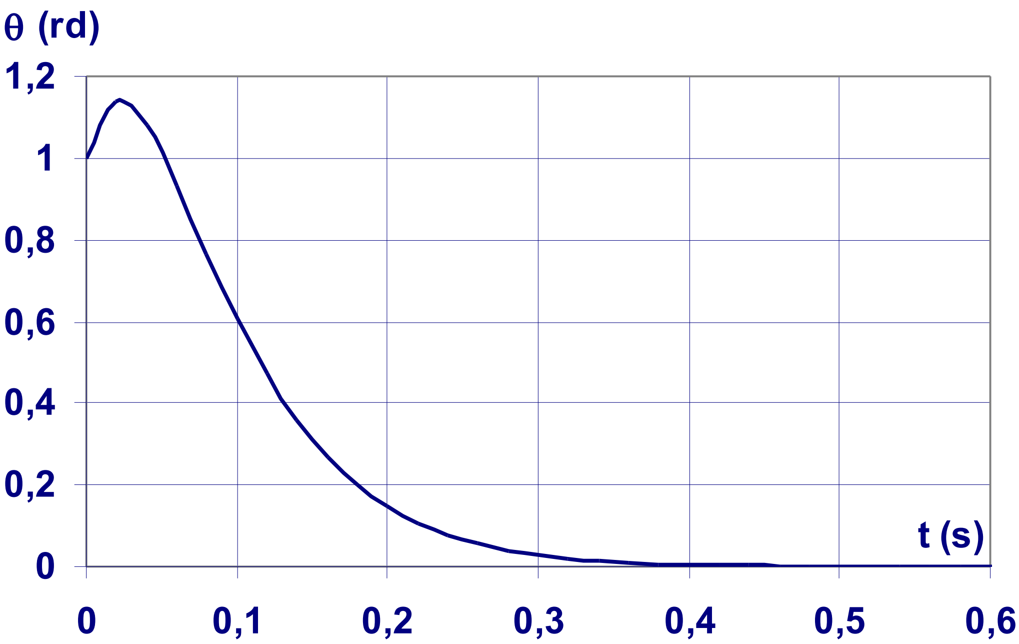
On fait tendre ω' vers 0 donc $(\theta'_0 + \gamma/2\ \theta_0)\sin(\omega' t)/\ \omega'$ tend vers

$(\theta'_0 + \gamma/2\ \theta_0)\omega' t/\omega' = (\theta'_0 + \gamma/2\ \theta_0)\ t$

$\boldsymbol{\theta = e^{-\gamma/2\,t}(\theta_0 + (\theta'_0 + \gamma\ \theta_0/2)\ t)}$

$\boldsymbol{\theta' = e^{-\gamma/2\,t}(\theta'_0 - \gamma/2\ (\theta'_0 + \gamma\ \theta_0/2)\ t)}$

C'est le régime apériodique qui permet d'atteindre l'équilibre le plus rapidement.



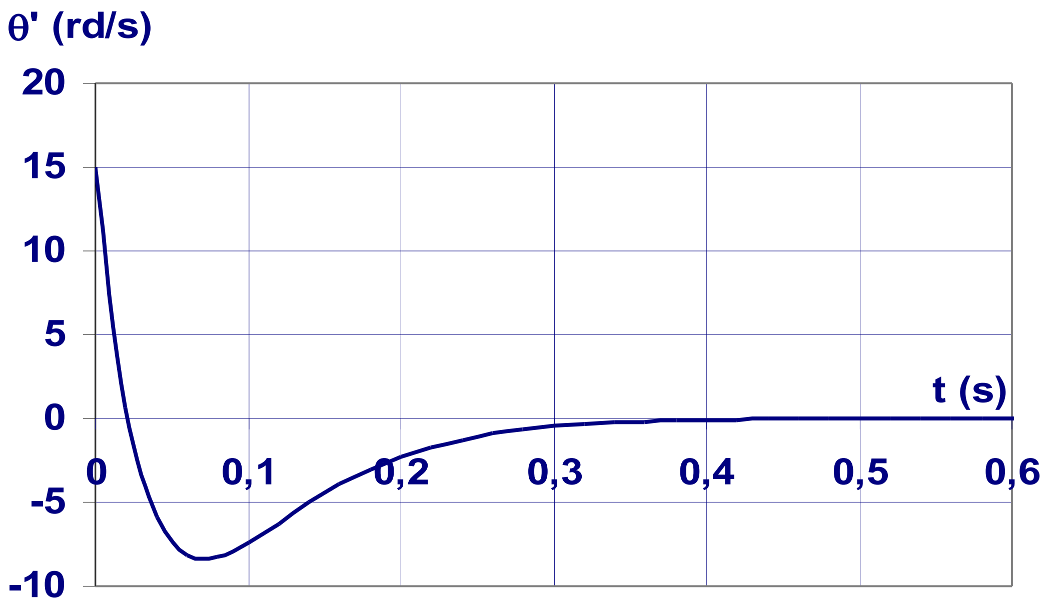
$\theta_0 = 1$ rd

$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 40$ rd/s

$\omega' = 0$



$\theta_0 = 1$ rd

$\theta'_0 = 15$ rd/s

$\omega_0 = 20$ rd/s

$\gamma = 40$ rd/s

$\omega' = 0$

3. Détermination du moment d'inertie total J du pendule

J est la somme du moment d'inertie J_0 de la tige et du moment d'inertie des disques par rapport à l'axe vertical du pendule.

Pour déterminer le moment d'inertie J_d d'un cylindre de masse m_d par rapport à un axe parallèle à son diamètre, on peut utiliser différents théorèmes sur le moment d'inertie.

D'abord un théorème très utile qui dit que le moment d'inertie par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires qui ont l'axe comme intersection.

On en déduit que le moment d'inertie par rapport à l'axe du cylindre qui vaut $m_d R^2/2$ est la somme de deux moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires à la base du cylindre et passant par son axe qui valent donc chacun $m_d R^2/4$.

Le moment d'inertie par rapport à un plan perpendiculaire à un cylindre et passant par son centre est connu et vaut $m_d e^2/12$. Le même théorème donne donc :

Donc $J_d = m_d R^2/4 + m_d e^2/12 = m_d (R^2/4 + e^2/12)$

Pour la tige, on obtient $J_0 = M (r^2/4 + L^2/12)$ M masse et L longueur de la tige.

C'est le résultat qu'on obtient pour un cylindre plein, mais nos disques sont creux sur un rayon r donc $m = m_d - m_d r^2/R^2$ ou $m_d = m/(1- r^2/R^2)$

$J_d = m (R^2/4 + e^2/12)/(1- r^2/R^2)$

Le moment d'inertie J_Δ du disque évidé vaut donc J_d moins le moment d'inertie de la partie évidée qui a la forme d'un cylindre de rayon r, d'épaisseur e et de masse $m_d r^2/R^2$:

$J_\Delta = J_d - m_d r^2/R^2(r^2/4 + e^2/12) = m (R^2/4 + e^2/12)/(1- r^2/R^2) - m r^2/R^2(r^2/4 + e^2/12)/(1- r^2/R^2)$

En développant, on obtient :

$J_\Delta = m((R^2 + r^2)/4 + e^2/12)$

On utilise ensuite le théorème de Huygens pour obtenir le moment d'inertie par rapport à l'axe distant de d. On obtient alors en n'oubliant pas qu'on a deux disques :

$J = J_0 + 2(J_\Delta + m d^2)$

$\mathbf{J = M (r^2/4 + L^2/12) + 2m(d^2 + (R^2 + r^2)/4 + e^2/12)}$

4. Constante de torsion d'un fil élastique cylindrique

On commence par étudier un tube de faible épaisseur Δr de rayon r et de longueur L

Ce tube est tordu de l'angle θ à son extrémité.

On s'intéresse d'abord à une petite tranche quasi rectangulaire de longueur L, de hauteur Δh et d'épaisseur Δr. Cette tranche subit une déformation en losange d'un angle $\phi = r\,\theta/L$ ce qui correspond à un effort de cisaillement $g = \mu\,\phi$ (μ Module de cisaillement)

$\mu = E/(2(1+\sigma))$ E module d'Young et σ coefficient de Poisson du matériau élastique.

Par définition $g = \Delta F/(\Delta h \Delta r)$ ΔF étant la force de cisaillement subie par la tranche

Cela produit un moment $\Delta M = r\,\Delta F = r\,g\,\Delta h \Delta r = \mu\,r^2\,\Delta h \Delta r/L\,\theta$

Le moment total subi par le tube est donc la somme des moments subis par l'ensemble des tranches faisant le tour complet du tube $M = \mu\,r^2\,\Delta r/L\,\theta\ \Sigma\Delta h = \mu\,r^2\,\Delta r/L\,\theta\ \ 2\pi\,r$

$M = 2\pi\,\mu\,r^3\,\Delta r/L\,\theta$

Donc pour un tube cylindrique fin d'épaisseur Δr de rayon r et de longueur L

$C = 2\pi\,\mu\,r^3\,\Delta r/L$

Pour une tige cylindrique pleine, on peut considérer qu'elle est constituée de tubes concentriques d'épaisseur dr et de rayons allant de 0 à R le rayon de la tige.

Le moment total subi par la tige sera l'intégrale de 0 à R de $2\pi\,\mu/L\,\theta\ r^3\,dr$

Ce qui donne $M = \pi\,\mu\,R^4/(2L)\,\theta$ donc

Pour une tige cylindrique pleine de rayon R et de longueur L

$C = \pi\,\mu\,R^4/(2L)$ Une tige 2 fois plus épaisse est 16 fois plus rigide !

Exemple : Fil d'acier de R = 2 mm et de longueur 1 m

$\mu_{acier} = 8{,}35.10^{10}$ donc $C = 2{,}1$ Nm