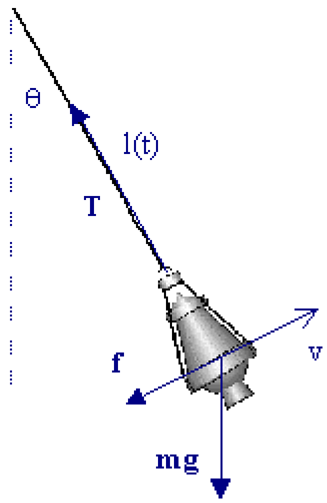
Le pendule paramétrique

par Gilbert Gastebois

1. Schéma du botafumeiro



Le botafumeiro est un encensoir géant qui est fixé à la croisée du transept de la cathédrale de St Jacques de Compostelle. Sa taille (1,6 m de haut et 54 kg) s'explique par le besoin de parfumer la cathédrale pour cacher la forte odeur des pèlerins qui dormaient dans la nef...

Pour diffuser le parfum d'encens, il fallait faire osciller l'encensoir et donc utiliser un système de poulies permettant à un groupe d'hommes de tirer sur une corde en cadence. On avait donc un pendule paramétrique (le paramètre étant la longueur du pendule (21,5 m de moyenne)). On s'aperçut rapidement qu'il était possible de donner à l'encensoir une amplitude considérable et de lui faire atteindre la hauteur des voûtes du transept (20,6 m), ce qui donnait et donne toujours à certaines dates particulières, un spectacle impressionnant (le botafumeiro décrit un arc de 60 m en rasant le sol à 68 km/h...).

Rq : On a la même chose avec un enfant qui se balance sur une escarpolette.

2. Etude du mouvement du botafumeiro

2.1 Équation différentielle du mouvement.

Équation de Newton : $d(J\omega)/dt = \Sigma M_F$

$J = ml^2$, donc $d(ml^2\omega)/dt = \Sigma M_F = M_{mg} + M_f + M_T$

$d(ml^2\omega)/dt = m(l^2 d\omega/dt + 2l\omega dl/dt)$

donc $m(l^2 d\omega/dt + 2l\omega dl/dt) = M_{mg} + M_f + M_T$

$m(l^2 d\omega/dt + 2l\omega dl/dt) = - mg\, l \sin\theta - f\, l + 0$

On pose $f = mk\,\omega^n = mk\,(d\theta/dt)^n$ (frottement fluide de coefficient de frottement réduit k)

$m(l^2 d\omega/dt + 2l\omega dl/dt) = - mg\, l \sin\theta - mkl(d\theta/dt)^n$

$ml^2 d^2\theta/dt^2 = - 2ml\, d\theta/dt\, dl/dt - mkl\,(d\theta/dt)^n - mg\, l \sin\theta$

$d^2\theta/dt^2 = - 2 d\theta/dt\, dl/dt / l - k/l\,(d\theta/dt)^n - g/l \sin\theta$

$$\mathbf{d^2\theta/dt^2 + k/l\,(d\theta/dt)^n + 2 d\theta/dt\, dl/dt / l + g/l \sin\theta = 0}$$

2.2 Solution de l'équation.

Cette équation n'a pas de solution analytique, sa solution est numérique. Cependant, on peut extraire certaines données du mouvement
Pour simplifier, on n = 1 (frottement laminaire. En réalité, n est voisin de 2)
on a alors :
$d^2\theta/dt^2 + (k/l + 2l'/l)\, d\theta/dt + g/l \sin\theta = 0$ (on pose $l' = dl/dt$)

Cette équation ressemble à celle du pendule amorti avec un coef $\gamma = k/l + 2l'/l$ (l est variable, mais garde une valeur voisine de sa moyenne 21,5 m donc l est presque constant)
Si on considère un l' constant (l = f(t) affine), γ est presque constant et on a une solution pseudo périodique amortie si $\gamma > 0$ et pseudo périodique amplifié si $\gamma < 0$
(si $l' < 0$ et $l' < - k/2$)

2.3 Amplification du mouvement.

Le terme qui modifie l'oscillation est $(k/l + 2l'/l)\, d\theta/dt$. On peut pour simplifier le raisonnement, négliger le terme d'amortissement, on obtient donc $2l'/l\, d\theta/dt$ ou $2l'/l\, \omega$. Quand on raccourcit la corde ($l'<0$), l'oscillation est amplifiée et quand on rallonge la corde ($l'>0$), elle est freinée. Si on veut que l'oscillation soit amplifiée, il faut que $|l'/l\, \omega|$ soit grande quand $l'<0$ et petite quand $l'>0$. La valeur de $|l'|$ est à peu près la même dans les deux cas, l varie peu, donc c'est la valeur de ω qui est importante. Il faut raccourcir la corde quand ω est grande, près du sol et la rallonger quand ω est faible, au sommet de la trajectoire. Dans ces conditions, l'oscillation s'amplifie. Il faut donc tirer sur la corde au moment où le pendule arrive près du sol et la relâcher quand le pendule atteint sa hauteur maximale. La fréquence d'excitation est donc le double de la fréquence du pendule.

Conditions d'amplification du mouvement :
$f_e = 2 f$
Raccourcissement de la corde ($l' < 0$) quand le pendule est en bas.
Allongement de la corde ($l' > 0$) quand le pendule est au sommet.

2.4 Stabilisation du pendule.

2.4.1 Vitesse angulaire maximale du pendule

Pour les grands angles, **$d^2\theta/dt^2 + k/l\, (d\theta/dt)^n + 2l'/l\, d\theta/dt + g/l \sin\theta = 0$**
donc le terme d'amplification vaut $(k(d\theta/dt)^n + 2l'\, d\theta/dt)/l = (k\omega^n + 2l'\omega)/l$.
Ce terme redevient >0 quand $k\omega^{n-1} > -2l'$ donc quand $\omega > (-2l'/k)^{1/(n-1)}$
Quand $\omega > (-2l'/k)^{1/(n-1)}$, le pendule est à nouveau freiné, on obtient donc une stabilisation de l'oscillation quand la vitesse angulaire vaut environ $(-2l'/k)^{1/(n-1)}$.
n = 2, donc **$\omega_{max} = -2l'/k$** ($l' < 0$ donc ω_{max} est bien positif)

Dans l'animation, on a k = 2,6 et la période T_e est de 5,31s pour une amplitude de l'excitateur $e_0 = 2$ m. $\omega_e = 2\pi/T_e = 1,183$ rd/s. On a une excitation sinusoïdale donc $l = l_0 + e_0\sin(\omega_e t + \varphi)$ donc $l' = e_0\omega_e\cos(\omega_e t + \varphi)$
l' n'est pas constante, il faut prendre une moyenne. Pour ce calcul approché, on peut prendre $l' = l'_{max}/2 = - e_0\omega_e/2$

$l' = - e_0\omega_e/2$ donne $\omega_{max} = - 2l'/k = e_0\, \omega_e/k = 0,91$ rd/s
ce qui correspond à une vitesse maximale de $V_{max} = \omega_{max}\, l_0 = 19,5$ m/s = 70 km/h
(vitesse proche de la vitesse maximale du botafumeiro ($V_m = 18,85$ m/s = 68 km/h).
Le modèle est donc plutôt bon)

2.4.2 Amplitude maximale du pendule

Quand l'oscillation du pendule est stabilisée, l'énergie mécanique moyenne est constante. Le pompage apporte à l'oscillateur, une énergie qui compense les pertes par frottement. On peut alors utiliser la conservation de l'énergie mécanique entre le bas de la trajectoire et le haut.
$Em = 1/2\ mV_m^2 = mg\ h$ donc $h = 1/2\ V_m^2/g$
$h = l_0 - l_0 \cos\theta_{max}$ donc $\theta_{max} = \arccos((l_0 - h)/l_0) = \arccos(1 - 1/2\ V_m^2/(l_0 g))$

Dans l'animation, $T = 10{,}62$ s, $V_m = 18{,}85$ m/s, $l_0 = 21{,}5$ m et $g = 9{,}81$ m/s²
$h = 1/2\ V_m^2/(l_0 g) = 18{,}1$ m et $\theta_{max} = 81°$ (valeurs expérimentales du botafumeiro)

2.5 Analyse physique du mouvement.

On peut se demander pourquoi l'oscillation du pendule est amplifiée.... après tout, on se contente de tirer sur la corde, donc on augmente sa tension, mais son moment est nul puisqu'elle passe par l'axe, donc elle n'a aucun rôle dans le mouvement du pendule ! Qui donc agit sur le pendule ? C'est la force de Coriolis.
Quand on se place dans un repère lié au pendule, on a un mouvement de rotation global et une vitesse relative radiale, il apparaît alors la pseudo-force $\mathbf{f_c}$ (on a aussi la pseudo-force centrifuge $\mathbf{f_e}$ dont le moment est nul)
$\mathbf{f_c} = 2\ m\ \mathbf{v_r} \times \boldsymbol{\omega}$. $\mathbf{v_r}$ est radial et $\mathbf{v_r}$ est perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$ donc $\mathbf{f_c}$ est tangentiel et vaut :
$f_c = -\ 2\ m\ v_r\ \omega$ (v_r vaut $dl/dt = l'$ donc on retrouve de terme d'amplification $a_c = 2\ l'\ \omega$ ou $\theta_c = 2\ l'/l\ \omega$)
Comme f_c est tangentiel, son moment vaut $f_c\ l$ et c'est ce moment qui amplifie ou freine le mouvement.
D'après l'expression du produit vectoriel $\mathbf{v_r} \times \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{f_c}$ est dans le sens du mouvement (amplification) quand $\mathbf{v_r}$ pointe vers l'axe, donc quand on raccourcit la corde et $\mathbf{f_c}$ est dans en sens inverse du mouvement (freinage) quand $\mathbf{v_r}$ pointe vers l'extérieur, donc quand on rallonge la corde.
Pourquoi faut-il tirer sur la corde quand le pendule est en bas et la relâcher quand il est en haut ?
C'est que lorsque le pendule est en bas, il faut produire du travail contre le poids et la force centrifuge qui est très grande à cause de la grande vitesse de rotation, ce travail est converti en énergie cinétique par l'intermédiaire de la force de Coriolis et le pendule gagne beaucoup d'énergie. Quand il est en haut, c'est le poids et la force centrifuge qui travaillent mais alors, la force centrifuge est faible et même le poids travaille moins à cause de l'inclinaison du pendule donc le pendule perd peu d'énergie. Au bilan, le pendule gagne de l'énergie à chaque demi-période et son oscillation s'amplifie.
L'oscillation finit par se stabiliser quand le gain d'énergie est compensé par la perte due au frottement de l'air.