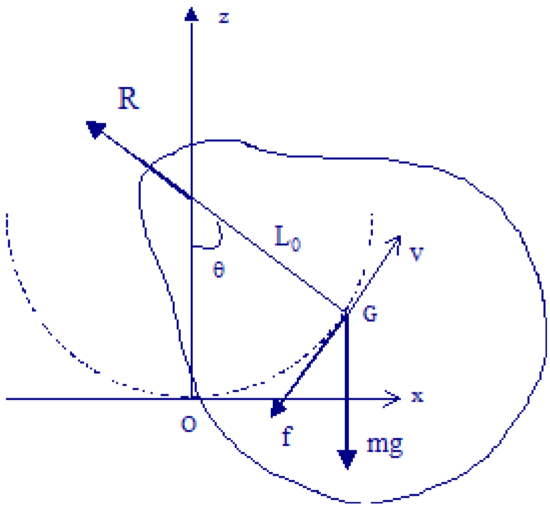
Animation Animation

Le pendule pesant

par Gilbert Gastebois

1. Schéma



L_0 Longueur du pendule = distance entre l'axe et le centre de gravité du pendule.
m   Masse du pendule
J   Moment d'inertie du pendule par rapport à son axe. Pour un pendule simple $J = mL_0^2$
mg   Poids du pendule
R   Réaction de l'axe
f   Force de frottement fluide sur le pendule

2. Etude du mouvement du pendule pesant

2.1 Équation différentielle du mouvement.

Équation de Newton : $\mathbf{J\, d^2\theta/dt^2 = \Sigma M_F}$

$\mathbf{J\, d^2\theta/dt^2 = M_{mg} + M_f + M_R}$

$J\, d^2\theta/dt^2 = - mg\, L_0 \sin\theta - f\, L_0 + 0$

$f = - k\, v = - k\, L_0\, \omega = - k\, L_0\, d\theta/dt$ (frottement fluide laminaire)

$J\, d^2\theta/dt^2 = - mg\, L_0 \sin\theta - k\, L_0^2\, \omega = - mg\, L_0 \sin\theta - k\, L_0^2\, d\theta/dt$

$d^2\theta/dt^2 = - k\, L_0^2/J\, d\theta/dt - mg\, L_0/J \sin\theta$

On pose $mg\, L_0/J = \omega_0^2$ et $k\, L_0^2/J = \gamma$

$\mathbf{d^2\theta/dt^2 + \gamma\, d\theta/dt + \omega_0^2 \sin\theta = 0}$

2.2 Équation différentielle pour les petits angles.

Cette équation n'a pas de solution analytique, sa solution est numérique. Cependant, on peut la traiter dans l'approximation des petits angles.
θ petit => $\sin\theta = \theta$
on a alors :

$\mathbf{d^2\theta/dt^2 + \gamma\, d\theta/dt + \omega_0^2\, \theta = 0}$

Solution de l'équation : <u>Cliquer ici</u>

3. Etude du pendule sans frottement

3.1 Équation différentielle pour les petits angles.

Si $\gamma = 0$, alors $\mathbf{d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2\,\theta = 0}$

donc $\boldsymbol{\theta = \theta_m \sin(\omega_0 t + \varphi)}$

$\boldsymbol{d\theta/dt = \theta_m\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)}$

Conditions initiales : A $t = 0$ $\theta = \theta_0$ et $d\theta/dt = \theta'_0$

$\theta_0 = \theta_m \sin\varphi$ et $\theta'_0 = \theta_m\,\omega_0 \cos\varphi$

$\tan\varphi = \omega_0\,\theta_0/\theta'_0$ et $\theta_m = \theta_0/\arctan\varphi$

3.2 Période du mouvement pour les petits angles.

$T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(J/mgL_0)^{1/2}$

$\boldsymbol{T_0 = 2\pi(J/mgL_0)^{1/2}}$

Pour un pendule simple $J = mL_0^2$ donc $T_0 = 2\pi(L_0/g)^{1/2}$

3.3 Étude énergétique

Sans frottement, E_m = constante (On pose $d\theta/dt = \theta'$)

$E_m = E_c + E_p = 1/2\,J\theta'^2 + mgz = 1/2\,J\theta'^2 + mg(L_0 - L_0\cos\theta) = 1/2\,J\theta'^2 + mgL_0(1 - \cos\theta)$

$\boldsymbol{E_m = 1/2\,J\theta'^2 + mgL_0(1 - \cos\theta)}$

A $\theta = \theta_m$, $\theta' = 0$ donc $E_m = mgL_0(1 - \cos\theta_m)$

$mgL_0(1 - \cos\theta_m) = 1/2\,J\theta'^2 + mgL_0(1 - \cos\theta)$

$mgL_0\cos\theta_m = -1/2\,J\theta'^2 + mgL_0\cos\theta$

$\theta'^2 = 2\,mgL_0/J(\cos\theta - \cos\theta_m)$

$\boldsymbol{\theta' = (2\,mgL_0/J(\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2} = (2\,\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2}}$

Remarque : En dérivant , on retrouve l'équation différentielle du mouvement

$\theta' = (2\,\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2}$

$d^2\theta/dt^2 = 1/2\,(2\,\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_m))^{-1/2}(-2\,\omega_0^2\sin\theta\;\theta') =$

$-\omega_0^2\sin\theta\;\theta'/(2\,\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2}$

Comme $\theta' = (2\,\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2}$, l'expression se simplifie, il reste

$d^2\theta/dt^2 = -\omega_0^2\sin\theta$

$\boldsymbol{d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2\sin\theta = 0}$

On peut aussi utiliser le Lagrangien :

$L = E_c - E_p = 1/2\,J\theta'^2 - mgL_0(1 - \cos\theta)$

Formule de Lagrange : $d(dL/d\theta')/dt - dL/d\theta = 0$

$Jd^2\theta/dt^2 + mgL_0\sin\theta = 0$ et

$\boldsymbol{d^2\theta/dt^2 + \omega_0^2\sin\theta = 0}$

4. Etude du mouvement sans frottement pour les grands angles

4.1 Formule de Borda pour les angles moyens.

$$d^2\theta/dt^2 = -\omega_0^2 \sin\theta$$

On développe $\sin\theta$ en décomposition de Taylor $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + \theta^5/120 + ...$

$$d^2\theta/dt^2 = -\omega_0^2 (\theta - \theta^3/6 + \theta^5/120 + ...)$$

On prend $\theta = \theta_m \sin(\omega t)$ avec $\omega = \omega_0 (1-\varepsilon)$ (ε petit)

$-\omega^2\theta_m \sin(\omega t) = -\omega_0^2 (\theta_m \sin(\omega t) - 1/6\, \theta_m^3 \sin^3(\omega t))$ On se limite aux deux premiers termes.

$-\omega_0^2 (1 - 2\varepsilon) \theta_m \sin(\omega t) = -\omega_0^2(\theta_m \sin(\omega t) - 1/6\, \theta_m^3 \sin^3(\omega t))$

$\sin^3\omega t = 3/4 \sin(\omega t) - 1/4 \sin(3 \omega t)$ (d'après $\sin(\omega t) = (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) /2i$)

$-\omega_0^2 (1 - 2\varepsilon) \theta_m \sin(\omega t) = -\omega_0^2(\theta_m \sin(\omega t) - 1/6\, \theta_m^3 (3/4 \sin(\omega t) - 1/4 \sin(3\omega t)))$

On obtient :

$2 \varepsilon \theta_m \sin(\omega t) = 1/8\, \theta_m^3 \sin(\omega t) - 1/24\, \theta_m^3 \sin(3\omega t) = f(t)$

f(t) est une fonction périodique de pulsation fondamentale ω avec une harmonique de rang 3. Comme on s'intéresse seulement à la période fondamentale, on peut abandonner le terme harmonique qui modifie la forme de f(t), mais pas sa période. On remplace ainsi f(t) par son fondamental : $f(t) = 1/8\, \theta_m^3 \sin(\omega t)$. On a donc :

$2 \varepsilon \theta_m \sin(\omega t) = 1/8\, \theta_m^3 \sin(\omega t)$

$\varepsilon = \theta_m^2 /16$ donc

$\omega = \omega_0 (1 - \theta_m^2 /16)$ $\theta_m^2 /16 << 1$, ce qui fait $\theta_m <<$ 4 rd ou $\theta_m << 240°$. En pratique, on peut prendre $\theta_m < 60°$

$T = 2\pi/\omega = 2\pi/(\omega_0 (1 - \theta_m^2/16)) = 2\pi/\omega_0 (1 + \theta_m^2/16) = T_0 (1 + \theta_m^2/16)$

$T = T_0 (1 + \theta_m^2/16)$

Cette formule est valable avec une remarquable précision jusqu'à $\theta_m = 60$ °.

$T = T_0 (1 + \theta_m^2/16)$ pour des angles inférieurs à 60°

4.2 Formule générale de la période.

D'après la conservation de l'énergie (Cf 3.3), on a :

$\theta' = (2\, mgL_0/J(\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2} = (2\, \omega_0^2 (\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2}$ or $\cos\theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$ donc

$\theta' = d\theta/dt$ donc $dt = d\theta/\theta' = d\theta/(2\, \omega_0^2 (\cos\theta - \cos\theta_m))^{1/2} =$

$d\theta/(2\, \omega_0^2 (1 - 2\sin^2(\theta/2) - 1 + 2 \sin^2(\theta_m/2)^{1/2}$

$dt = d\theta/(4\, \omega_0^2 (\sin^2(\theta_m/2) - \sin^2(\theta/2))^{1/2}$

On pose $u = \sin(\theta/2)/\sin(\theta_m/2)$ et $k = \sin(\theta_m/2)$ d'où $u = \sin(\theta/2)/k$

donc $du = 1/2 \cos(\theta/2)/k\, d\theta = (1 - \sin^2(\theta/2))^{1/2} d\theta /(2k) = (1 - k^2u^2)^{1/2} d\theta /(2k)$ donc $d\theta = 2k\, du/(1 - k^2u^2)^{1/2}$

$dt = 2k\, du/((1 - k^2u^2)(4\, \omega_0^2 (k^2 - k^2u^2)))^{1/2} = 2k\, du/((1 - k^2u^2)(4\, k^2 \omega_0^2 (1 - u^2)))^{1/2} =$

$du /\omega_0 /((1 - k^2u^2)(1 - u^2))^{1/2}$

$$\mathbf{dt = du /\omega_0 /((1 - k^2u^2)(1 - u^2))^{1/2}}$$

Si on intègre dt de $\theta = 0$ à $\theta = \theta_m$, ce qui correspond à $u = 1$, on obtient le quart de la période donc

$$T = 4/\omega_0 \int_0^1 du / ((1 - k^2u^2)(1 - u^2))^{1/2} = 4/\omega_0 \, K(k) = 2\, T_0/\pi \, K(\sin(\theta_m/2))$$

K(k) est l'intégrale elliptique de Legendre:

$$K(k) = \pi/2\, (1 + k^2/4 + 9/64\, k^4 + ... + ((2n)!/(2^n\, n!)^2)^2\, k^{2n} + ...) = \pi/2 \sum ((2n)!/(2^n\, n!)^2)^2\, k^{2n}$$

$$\mathbf{T = T_0\, (1 + 1/4\ \sin^2(\theta_m/2) + 9/64\ \sin^4(\theta_m/2) + 25/256\ \sin^6(\theta_m/2) + ... + ((2n)!/(2^n\, n!)^2)^2\ \sin^{2n}(\theta_m/2) + ...\ )}$$

$$\mathbf{T = T_0 \sum((2n)!/(2^n\, n!)^2)^2\ \sin^{2n}(\theta_m/2)}$$

Si on prend les deux premiers termes pour θ_m assez petit pour qu'on puisse remplacer $\sin \theta_m/2$ par $\theta_m/2$, on obtient :

$\mathbf{T = T_0\, (1 + \theta_m^2/16)}$ On retrouve la formule de Borda

On obtient :

θ_m °	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180
$1+ \theta_m^2/16$ (en rd)	1	1,00	1,01	1,02	1,03	1,05	1,07	1,09	1,12	1,15	1,19	1,23	1,27	1,32	1,37	1,43	1,49	1,55	1,62
$2/\pi\, K(\sin(\theta_m/2))$	1	1,00	1,01	1,02	1,03	1,05	1,07	1,10	1,14	1,18	1,23	1,29	1,37	1,47	1,59	1,76	2,01	2,44	infini

Si on prend les trois premiers termes :

$T = T_0\, (1 + \sin^2(\theta_m/2)/4 + 9/64 \sin^4(\theta_m/2) + 25/256 \sin^6(\theta_m/2))$

$\sin^2(\theta_m/2) = (\theta_m/2 - \theta_m^3/48)^2 = \theta_m^2/4 - \theta_m^4/48 + \theta_m^6/1440$ (on se limite à la puissance 6)

$\sin^4(\theta_m/2) = \theta_m^4/16 - \theta_m^6/96$ (on se limite encore à la puissance 6)

$\sin^6(\theta_m/2) = \theta_m^6/64$ (on se limite toujours à la puissance 6)

$1 + \sin^2(\theta_m/2)/4 + 9/64 \sin^4(\theta_m/2) + 25/64 \sin^6(\theta_m/2) = 1 + \theta_m^2/16 - \theta_m^4/192 + 9/1024\, \theta_m^4 - 9/6144\, \theta_m^6 + 1/5760\, \theta_m^6 + 25/16384\, \theta_m^6 = 1 + \theta_m^2/16 + 11/3072\, \theta_m^4 + 173/737280\, \theta_m^6$

$\mathbf{T = T_0\, (1 + 1/16\, \theta_m^2 + 11/3072\ \theta_m^4 + 173/737280\ \theta_m^6)}$ (approximation assez précise jusqu'à $\theta_m = 140$ °)

4.3 Équation horaire θ = f(t).

Le mouvement général du pendule est périodique donc f(t) peut être écrit sous forme d'une série de Fourier :

$\theta = a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + ... + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + ...$

Le mouvement du pendule est le même pour $\theta > 0$ et $\theta < 0$ et symétrique pour la montée et pour la descente.

On prend des conditions initiales telles que à $t = 0$, $f'(t) = 0$. Dans ces conditions, les coefficients des cosinus et ceux des harmoniques paires sont tous nuls.

Il reste $\theta = b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + b_5 \sin(5\omega t) +....$ L'oscillation étant proche d'un sinus, il est probable que les coefficients b_n sont faibles par rapport à b_1 et qu'ils décroissent très vite, on ne conserve donc que le premier harmonique. On pose donc :

$\theta = a \sin(\omega t) + b \sin(3\omega t)$

L'équation différentielle est :
$d^2\theta/dt^2 = - \omega_0^2 \sin\theta$

On développe $\sin\theta$ en décomposition de Taylor $\sin\theta = \theta - \theta^3/6 + \theta^5/120 + ...$ On ne garde que les deux premiers termes
$d^2\theta/dt^2 = - \omega_0^2 (\theta - \theta^3/6 + \theta^5/120)$ On remplace θ par $a \sin(\omega t) + b \sin(3\omega t)$

$- a \omega^2 \sin(\omega t) - 9b\omega^2 \sin(3\omega t) = a \sin(\omega t) + b \sin(3\omega t) - 1/6 (a \sin(\omega t) + b \sin(3\omega t))^3 - 1/120 (a \sin(\omega t) + b \sin(3\omega t))^5$

On néglige les termes de puissance supérieure à a^5
$- a \omega^2 \sin(\omega t) - 9b\omega^2 \sin(3\omega t) = a \sin(\omega t) + b \sin(3\omega t) - 1/6 (a^3 \sin^3(\omega t) + 3a^2b \sin^2(\omega t)\sin(3\omega t)) - 1/120 a^5 \sin^5(\omega t)$

On développe et on linéarise par la formule d'Euler ($\sin\theta = (e^{i\theta} - e^{-i\theta})/2i$)
$\sin^3\theta = 3/4 \sin\theta -1/4 \sin(3\theta)$ $\sin^2\theta \sin(3\theta) = -1/4 \sin\theta + 1/2 \sin(3\theta) -1/4 \sin(5\theta)$
$\sin^2(3\theta) \sin\theta = 1/2 \sin\theta +1/4 \sin(5\theta) -1/4 \sin(7\theta)$
$\sin^5\theta = 5/8 \sin\theta - 5/16 \sin(3\theta) + 1/16 \sin(5\theta)$
$- a \omega^2 \sin(\omega t) - 9b\omega^2 \sin(3\omega t) = - \omega_0^2((a - 3a^3/24 + 3a^2b/24 + 5a^5/8) \sin(\omega t) + (b - 6a^2b/24 + a^3/24) \sin(3\omega t))$

Il faut $(a - 3a^3/24 + 3a^2b/24 + a^5/192)/a = (b - 6a^2b/24 + a^3/24)/(9b)$
$216b - 27a^2b + 27ab^2 + 9a^4b/192 = 24b - 6a^2b + a^3$
$192b - 21a^2b + 27ab^2 + 9a^4b/192 = a^3$
On néglige ab^2 et a^4b, on obtient : $b = a^3/(192 - 21a^2)$. Si $a << 3$, on obtient
$b = a^3/192 (1 + 21/192 a^2) = a^3/192$ donc :
$\boldsymbol{\theta = a \sin(\omega t) + a^3/192 \sin(3\omega t)}$

Remarque :
Si on préfère des conditions initiales où $\theta = \theta_m$, on aura ωt remplacé par $\omega t + \pi/2$ et
$\theta = a \cos(\omega t) - a^3/192 \cos(3\omega t)$

Amplitude maximale :
On a l'amplitude maximale pour $\omega t = \pi/2$ donc
$\boldsymbol{\theta_m = a - a^3/192}$
Il n'est pas facile d'en déduire $a = f(\theta_m)$, les équations du troisième degré sont pénibles, mais a est proche de θ_m, donc on pose : $a = \theta_m(1 + \varepsilon)$ et on se limite au premier ordre en ε
$\theta_m = \theta_m(1 + \varepsilon) - \theta_m^3(1 + 3 \varepsilon)/192 = \theta_m + \varepsilon \theta_m - \theta_m^3/192 - 3 \varepsilon \theta_m^3/192$
$\varepsilon (1 - 3 \theta_m^2/192) = \theta_m^2/192$
$\varepsilon = \theta_m^2/192 /(1 - 3 \theta_m^2/192) \simeq \theta_m^2/192$ car $3 \theta_m^2/192 << 1$
$\boldsymbol{a = \theta_m + \theta_m^3/192}$

Période du mouvement :
On a : $a \omega^2 = \omega_0^2(a - 3a^3/24 + 3a^2b/24 + a^5/192)$ avec $b = a^3/192$ donc
$\omega^2 = \omega_0^2(1 - a^2/8 + a^4/1536 + a^4/192) = \omega_0^2(1 - a^2/8 + 9a^4/1536)$
On a $(1 + \varepsilon)^{1/2} = 1 + 1/2 \varepsilon - 1/8 \varepsilon^2$ donc $(1 - a^2/8 + 9a^4/1536)^{1/2} = 1 - a^2/16 + 9a^4/3072 - a^4/512 = 1 - a^2/16 + 3a^4/3072$
$\boldsymbol{\omega = \omega_0(1 - a^2/16 + a^4/1024)}$ ou en remplaçant a par $\theta_m + \theta_m^3/192$
$\boldsymbol{\omega = \omega_0(1 - \theta_m^2/16 + \theta_m^4/3072)}$ Formules précises jusqu'à $a = 2,3$ ($\theta_m = 130$ °)

$T = 2\pi/\omega = 2\pi/(\omega_0(1 - \theta_m{}^2/16 + \theta_m{}^4/3072)) = T_0\,(1 - \theta_m{}^2/16 + \theta_m{}^4/3072))^{-1}$

On a $(1 + \varepsilon)^{-1} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2$ donc $(1 - \theta_m{}^2/16 + \theta_m{}^4/3072)^{-1} = 1 + \theta_m{}^2/16 - \theta_m{}^4/3072 + \theta_m{}^4/256 = 1 + \theta_m{}^2/16 + 11/3072\ \theta_m{}^4$

$T = T_0\,(1 + \theta_m{}^2/16 + 11/3072\ \theta_m{}^4)$ On retrouve les trois premiers termes de la formule de Legendre de la période.

> **Pour $\theta_m < 2{,}5$ rd (140 °)**
>
> **$\theta = (\theta_m + \theta_m{}^3/192)\sin(\omega t) + \theta_m{}^3/192\sin(3\omega t)$**
>
> **$\omega = \omega_0(1 - 1/16\ \theta_m{}^2 + 1/3072\ \theta_m{}^4 - 23/737280\ \theta_m{}^6)$**

5. Cas de la rotation du pendule sans frottement.

5.1 Vitesse angulaire maximale indispensable.

Si la vitesse angulaire maximale dépasse une certaine valeur, le pendule n'oscille plus, il tourne autour de son axe.

Cela arrive quand la vitesse ne s'annule jamais, donc quand la vitesse θ_{min} en haut de la trajectoire ($z = 2\,L_0$) est supérieure à zéro.

On a alors $1/2\ J\theta'_m{}^2 = 1/2\ J\theta'_{min}{}^2 + 2\ mgL_0 > 2\ mgL_0$ donc **$\theta'_m{}^2 > 4\ mgL_0/J$** ou **$\theta'_m > 2\,\omega_0$**

Remarque : Pour un pendule simple constitué d'une boule reliée à un fil, il faut que le fil reste tendu donc il faut qu'en haut de la trajectoire, la tension du fil soit positive donc il faut que

$ml\,\theta_{min}{}^2 > mg$ donc $\theta_{min} > (g/L_0)^{1/2}$ ou $\theta_{min} > \omega_0$

donc $E_m = 1/2\ mL_0{}^2\theta'_m{}^2 > 2\ mgL_0 + 1/2\ mL_0{}^2\theta'_{min}{}^2$ donc $\theta'_m{}^2 > 4\ mg/L_0 + mL_0{}^2\theta'_{min}{}^2$

$\theta'_m{}^2 > 4\ mg/L_0 + mg/L_0$ donc **$\theta'_m > (5\ mg/L_0)^{1/2}$**

5.2 Période de rotation.

D'après la conservation de l'énergie (Cf 3.3), on a :

$E_m = 1/2\ J\theta'^2 - mgL_0\,(1 - \cos\theta) = 1/2\ J\theta'_m{}^2$

$\theta'^2 = \theta'_m{}^2 - 2\ mgL_0/J(1 - \cos\theta)$ or $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$ donc

$\theta' = (\theta'_m{}^2 - 2\,\omega_0{}^2\,(1 - \cos\theta))^{1/2} = (\theta'_m{}^2 - 4\,\omega_0{}^2\sin^2(\theta/2))^{1/2}$

$\theta' = d\theta/dt$ donc $dt = d\theta/\theta' = d\theta/(\theta'_m{}^2 - 4\,\omega_0{}^2\sin^2(\theta/2))^{1/2}$

$dt = d\theta/(\theta'_m{}^2 - 4\,\omega_0{}^2\sin^2(\theta/2))^{1/2}$

On pose $u = \sin(\theta/2)$

donc $du = 1/2\cos(\theta/2)\,d\theta = 1/2\ d\theta\,(1 - \sin^2(\theta/2))^{1/2} = 1/2\ d\theta\,(1 - u^2)^{1/2}$ donc

$d\theta = 2\ du/(1 - u^2)^{1/2}$

$dt = 2\ du/((1 - u^2)(\theta'_m{}^2 - 4\,\omega_0{}^2\sin^2(\theta/2)))^{1/2} = 2/\theta'_m\ du/((1 - u^2)(1 - 4\,\omega_0{}^2/\theta'_m{}^2\,u^2)))^{1/2} = 2/\theta'_m\,/((1 - u^2)(1 - k^2u^2))^{1/2}\ du$

en posant $k = 2\,\omega_0/\theta'_m = \theta'_0/\theta'_m$ ($\theta'_0 = 2\,\omega_0$ est la valeur minimale de θ'_m permettant au pendule de tourner autour de son axe)

$dt = 2/\theta'_m\,/((1 - u^2)(1 - k^2u^2))^{1/2}\ du$

Si on intègre dt de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$, ce qui correspond à $u = 1$, on obtient la moitié de la période donc

$$T = 4/\theta'_m \int_0^1 du / ((1 - u^2)(1 - k^2 u^2))^{1/2} = 4/\theta'_m K(k) = 4/\theta'_m K(\theta'_0/\theta'_m)$$

K(k) est l'intégrale elliptique de Legendre :

$K(k) = \pi/2 (1 + k^2/4 + 9/64 k^4 + ... + ((2n)!/(2^n n!)^2)^2 k^{2n} +...) = \pi/2 \sum ((2n)!/(2^n n!)^2)^2 k^{2n}$

$$\mathbf{T = 2\pi/\theta'_m (1 + 1/4 (\theta'_0/\theta'_m)^2 + 9/64 (\theta'_0/\theta'_m)^4 + 25/256 (\theta'_0/\theta'_m)^6 + ... + ((2n)!/(2^n n!)^2)^2 (\theta'_0/\theta'_m)^{2n} + ...)}$$

$$\mathbf{T = 2\pi/\theta'_m \sum ((2n)!/(2^n n!)^2)^2 (\theta'_0/\theta'_m)^{2n}}$$

Par exemple en prenant $L_0 = 1$ m, $\theta'_0 = 6{,}264$ rd/s, on a alors :

θ'_m/θ'_0	1	1,001	1,005	1,02	1,05	1,118	1,3	1,45	1,6	1,75	1,9	2,1	2,135
T (s)	infini	2,878	2,353	1,898	1,589	1,289	0,953	0,808	0,707	0,631	0,572	0,509	0,500

Si $\theta'_m >> \theta'_0$, K(k) tend vers K(0) = $\pi/2$ et T tend vers $T_f = 2\pi/\theta'_m$ (θ'_m est quasi-constante, le poids n'influe presque plus sur le mouvement et on a un mouvement circulaire quasi-uniforme)

Si on prend les quatre premiers termes :

$$\mathbf{T = 2\pi/\theta'_m (1 + 1/4 (\theta'_0/\theta'_m)^2 + 9/64 (\theta'_0/\theta'_m)^4 + 25/256(\theta'_0/\theta'_m)^6)}$$

(On obtient T avec une très bonne précision pour $\theta'_m > 1{,}5\ \theta'_0$)

Remarque : Pour le pendule simple avec un fil, il faut que $\theta'_m/\theta'_0 = (5/4)^{1/2}$ ce qui donne $\theta'_m/\theta'_0 = 1{,}118$.

La période maximale de rotation d'un pendule de 1m, permettant au fil de rester tendu est alors de 1,289 s.

Intégrale elliptique de Legendre K(*x*)

K(*x*), l'intégrale elliptique de Legendre est définie, pour $0 <= |x| < 1$, par :

$$\mathbf{K(x) = \int_0^1 du / ((1 - u^2)(1 - x^2u^2))^{1/2}}$$

Sa valeur est donnée par la série suivante :

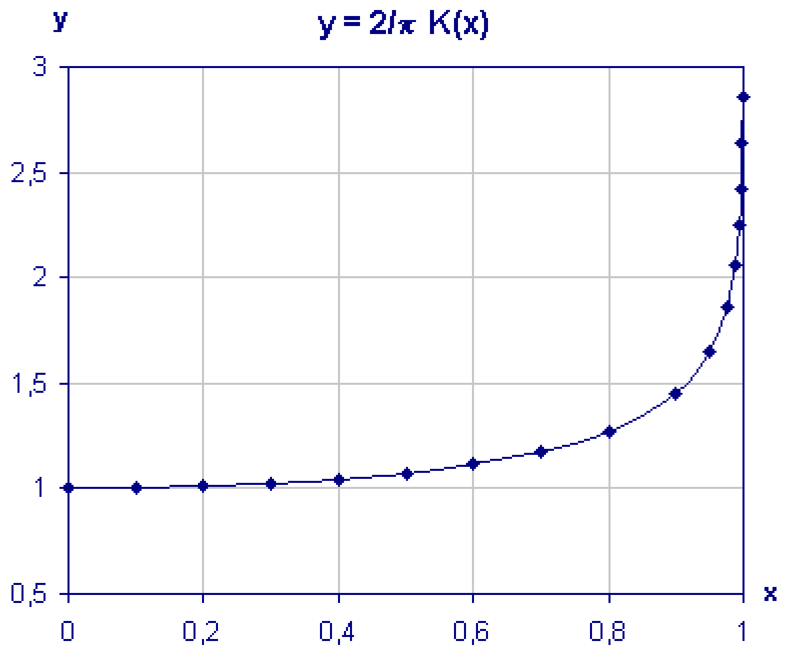
$K(x) = \pi/2 (1 + 1/4\, x^2 + 9/64\, x^4 + 25/256\, x^6 + ... + ((2n)!/(2^n n!)^2)^2\, x^{2n} + ...)$

$\mathbf{K(x) = \pi/2 \sum((2n)!/(2^n n!)^2)^2\ x^{2n}}$ **(La somme allant de 0 à l'infini)**

n! est la factorielle de n

On obtient :

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,975	0,987	0,993	0,996	0,998	0,999	1
$2/\pi\ K(x)$	1	1,003	1,010	1,024	1,044	1,073	1,115	1,175	1,270	1,452	1,649	1,855	2,056	2,248	2,424	2,642	2,862	infini



Remarque : si $x = 0$, l'intégrale est directement calculable, elle donne arcsin(1) - arcsin(0) =$\pi/2$, ce qu'on retrouve en calculant la série.