Le pèse-lettres

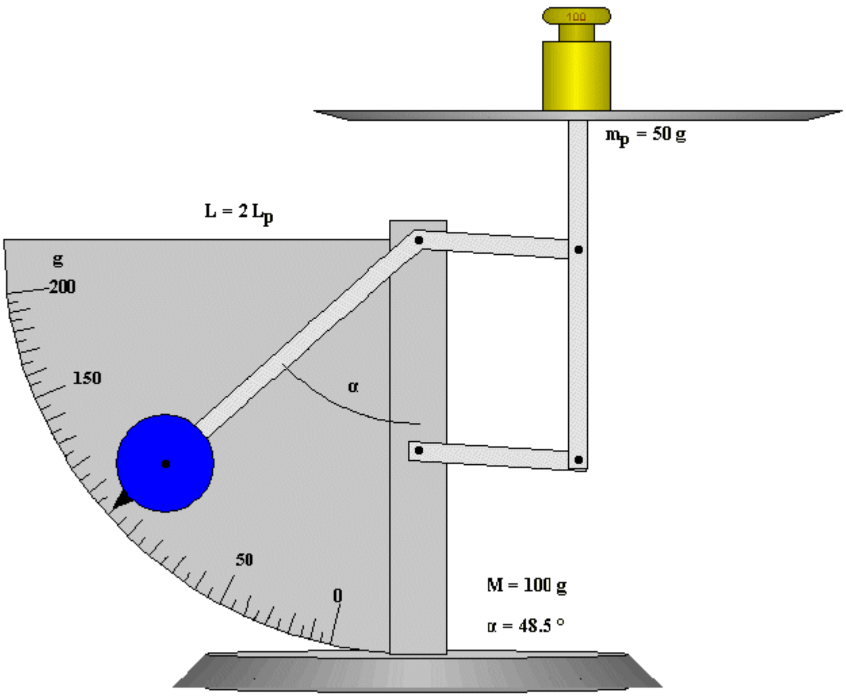
par Gilbert Gastebois

1. Description

Le pèse-lettres est un dispositif mécanique permettant de peser rapidement de petits objets.

Il est constitué d'un fléau coudé relié d'un côté à un plateau de pesée et de l'autre à un contrepoids

2. Schéma



m_p Masse du plateau

m_o Masse de l'objet à peser

$m = m_p + m_o$

M Masse du contrepoids

L_p Longueur du fléau côté plateau

L Longueur du fléau côté contrepoids

α Angle entre L et la verticale

Le fléau fait un coude de 135 ° (3π/4 rd)

La masse du fléau est négligeable devant M et m

3. Étude

3.1 Équilibre du fléau

A l'équilibre la somme des moments est nulle.

En négligeant le moment du poids du fléau, on a :

$m\,g\,L_p \sin(3\pi/4 - \alpha_e) = M\,g\,L \sin \alpha_e$

$M\,L \sin \alpha\,_e = m\,L_p (\sin(3\pi/4) \cos \alpha_e - \cos(3\pi/4) \sin \alpha_e) = 2^{-1/2}\,m\,L_p (\cos \alpha_e + \sin \alpha)_e$

$(2^{1/2}\ M\,L - m\,L_p) \sin \alpha_e = m\,L_p \cos \alpha_e$

$\tan \alpha_e = 1/(2^{1/2} M\,L/(m\,L_p) - 1)$ ou

$m = 2^{1/2} M\,L/L_p\ \tan \alpha_e /(1 + \tan \alpha_e)$

$m_o = 2^{1/2} M\,L/L_p\ \tan \alpha_e /(1 + \tan \alpha_e) - m_p$

3.2 Équation différentielle.

2ème loi de Newton en rotation :

$J\,\alpha'' = \Sigma\, M_F$

$J\,\alpha'' = m\,g\,L_p \sin(3\pi/4 - \alpha) - M\,g\,L \sin\alpha - h\,\alpha'$ ($h\,\alpha'$ est un frottement visqueux)

$J\,\alpha'' = 2^{-1/2}\, m\,g\,L_p (\cos\alpha + \sin\alpha) - M\,g\,L \sin\alpha - h\,\alpha'$

$J\,\alpha'' + h\,\alpha' + M\,g\,L \sin\alpha - 2^{-1/2}\, m\,g\,L_p (\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

Cette équation ne peut se résoudre que numériquement.

Remarque : Pour des oscillations de faible amplitude θ autour de la position d'équilibre, on pose $\alpha = \alpha_e + \theta$ et on développe au premier ordre. On obtient une équation classique d'oscillations amorties du type :

$\theta'' + \gamma\,\theta' + \omega_0^2\,\theta = 0$

avec $\omega_0^2 = m\,g\,L_p\,((2^{1/2} M\,L/(m\,L_p) - 1)^2 + 1)/(2^{1/2} J)$ et $\gamma = h/J$

La période des oscillations vaut $T = 2\pi/(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$