Animation

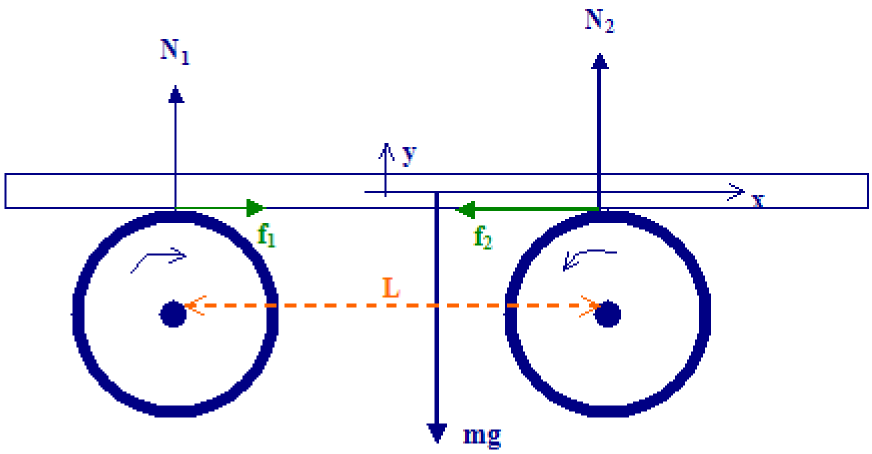
Planche glissant sur deux roues en rotation inverse

Animation

par Gilbert Gastebois

On étudie ici, le comportement assez étrange à première vue, d'une planche horizontale glissant librement sur deux roues en rotation inverse.
La planche adopte un mouvement oscillant sinusoïdal autour d'une position qui dépend des coefficients de frottement de la planche sur chaque roue.

1.Notations



Les vecteurs sont notés en gras

m	Masse de la planche
L	Longueur séparant les moyeux des deux roues
e	Épaisseur de la planche	$e << L$
$\mathbf{N_1}$, $\mathbf{N_2}$	Réactions normales des roues sur la planche
$\mathbf{f_1}$, $\mathbf{f_2}$	Frottements des roues sur la planche
μ_1, μ_2	Coef de frottement planche-roue	$\mu = N/f$
r	Position du centre de gravité par rapport au milieu de L
x	Position du centre de gravité G par rapport à la position de stabilité de la planche.
$v = dx/dt$	Vitesse de la planche.

df/dt est notée f '   et   d²f/dt² est notée f "

2. Étude du mouvement.

Lois de Newton :

$m\,\mathbf{a} = \mathbf{N_1} + \mathbf{N_2} + \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2} + m\,\mathbf{g}$ **(1)**

$\mathbf{0} = \Sigma\,\mathbf{M_{F/G}}$ **(2)**

On projette (1) sur un axe y vertical

$0 = N_1 + N_2 - m\,g$ **(3)**

On écrit l'équation (2) par rapport au centre de gravité G

$0 = N_1\,(L/2 + r) - N_2\,(L/2 - r) - f_1\,e/2 + f_2\,e/2$

$0 = N_1\,(L/2 + r) - N_2\,(L/2 - r) - \mu_1 N_1\,e/2 + \mu_2 N_2\,e/2$

En combinant ce résultat avec (3), on obtient en posant $L_a = L - (\mu_1 + \mu_2)e/2$

$N_1 = mg(L/2 - r - \mu_2 e/2)/L_a$

$N_2 = mg(L/2 + r - \mu_1 e/2)/L_a$ donc

$f_1 = \mu_1 mg(L/2 - r - \mu_2 e/2)/L_a$

$f_2 = \mu_2 mg(L/2 + r - \mu_1 e/2)/L_a$

On projette (1) sur un axe x horizontal

$m a = m r'' = f_1 - f_2$

$m r'' = \mu_1 mg(L/2 - r - \mu_2 e/2)/L_a - \mu_2 mg(L/2 + r - \mu_1 e/2)/L_a = (\mu_1 - \mu_2)mgL/(2L_a) - (\mu_1 + \mu_2)mg/L_a \; r$

$r'' + (\mu_1 + \mu_2)g/L_a \; r = (\mu_1 - \mu_2)gL/(2L_a)$

On pose $x = r - L(\mu_1 - \mu_2)/(2(\mu_1 + \mu_2))$ et on obtient : $x'' + (\mu_1 + \mu_2)g/L_a \; x = 0$

La solution est sinusoïdale : $x = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\boldsymbol{\omega_0 = ((\mu_1 + \mu_2)g/L_a)^{1/2}}$

$v = x' = \omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$ $\boldsymbol{V_m = X_m ((\mu_1 + \mu_2)g/L_a)^{1/2}}$

$\boldsymbol{T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi(L_a/((\mu_1 + \mu_2)g))^{1/2}}$ $(T_0 = 2\pi(L/((\mu_1 + \mu_2)g))^{1/2}$ si $e \ll L)$

La masse oscille autour de sa position d'équilibre $\boldsymbol{r_0 = L(\mu_1 - \mu_2)/(2(\mu_1 + \mu_2))}$

3. Étude heuristique du mouvement.

Pourquoi la planche oscille t-elle?

On pourrait penser que par exemple si les deux μ étaient égaux, les deux frottements seraient égaux et la planche serait immobile. Mais ce n'est pas vrai en général, ce n'est vrai qu'à la position d'équilibre stable. En dehors, la planche appuie davantage sur la roue qui est la plus proche de son centre de gravité, ce qui augmente le frottement sur cette roue et diminue le frottement sur l'autre. La planche est donc renvoyée en arrière, puis le même effet apparaît sur l'autre roue et la planche oscille de part et d'autre de sa position d'équilibre. La théorie montre que le mouvement est harmonique.

Le mouvement sera d'autant plus rapide que la différence entre les deux frottements sera grande. Ceci est d'autant plus le cas que les coef μ sont grands que la pesanteur est forte et que la longueur L est petite et ainsi la période augmente avec L et diminue avec μ et g.