Animation Animation

Le corps noir

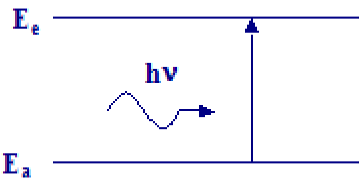
par Gilbert Gastebois

Constante de Boltzmann **$k = 1{,}380\,650\,3 \times 10^{-23}$ J/K**
Constante de Planck **$h = 6{,}626\,068\,74 \times 10^{-34}$ J.s**
Vitesse de la lumière **$c = 299\,792\,458$ m/s**

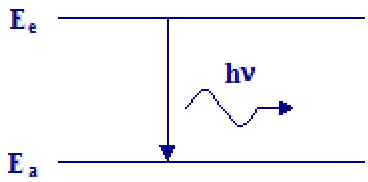
1. Probabilité d'échange atome-photon

Le photon est un boson, il suit donc la statistique de Bose-Einstein. La probabilité d'émission d'un boson en présence de n bosons identiques est proportionnelle à n+1 :
$P_e = (n+1)\,p$ et la probabilité d'absorption est proportionnelle à n :
$P_a = n\,p$ (p : probabilité d'émission du boson seul) *

2. Équilibre thermique du corps noir



Absorption



Emission

Le corps noir est constitué d'une cavité creuse de volume V à la température T en équilibre thermique. Les atomes de la paroi absorbent, puis réémettent les photons présents dans la cavité. Ils oscillent donc entre des niveaux d'énergie E_a et E_e, séparés de $\Delta E = h\nu$

N_e atomes sont dans l'état E_e et N_a dans l'état E_a. La cavité contient n photons.

Le nombre de photons émis est donc $N_e\,P_e = N_e\,(n+1)\,p$

et le nombre de photons absorbés est $N_a\,P_a = N_a\,n\,p$

A l'équilibre thermique, ces deux nombres sont égaux, donc
$N_e\,(n+1)\,p = N_a\,n\,p$ ou $N_e\,(n+1) = N_a\,n$

Or à l'équilibre thermique, on a aussi $N_e/N_a = e^{-\Delta E/kT}$ (formule de Boltzmann)

donc $n/(n+1) = e^{-\Delta E/kT}$ et donc
$n = 1/(e^{\Delta E/kT} - 1) = 1/(e^{h\nu/kT} - 1)$
L'énergie des photons de fréquence ν est donc $E_\nu = n\,h\nu = h\nu/(e^{h\nu/kT} - 1)$

3. Nombre de modes contenus dans l'intervalle de fréquence δν

Sur une longueur L, il y a une onde stationnaire de polarisation donnée si
$L = j\,\lambda/2$ ou $L = j\,\pi/k_j$ donc $k_j = j\,\pi/L$ (j entier)

l'intervalle entre deux nombres d'onde successifs est donc $\delta k = \pi/L$.
Le nombre de valeurs de k compris dans un intervalle $\delta k \gg \delta k$ est donc $\delta k/\delta k = \delta k\,L/\pi$
Cependant, une onde stationnaire contenant 2 ondes, Le nombre de modes δM n'est que la moitié du nombre de valeurs de k donc $\delta M = \delta k\,L/2\pi$

A 3 dimensions, $\delta M = \delta Mx\,\delta My\,\delta Mz = \delta kx\,Lx/2\pi\,\delta ky\,Ly/2\pi\,\delta kz\,Lz/2\pi$
$\delta M = LxLyLz/(2\pi)^3\,\delta kx\,\delta ky\,\delta kz$
$\delta M = V/(2\pi)^3\,\delta k^3$. Le photon ayant 2 états de polarisation possibles, $\delta M = 2V/(2\pi)^3\delta k^3$

δk^3 est l'intervalle de volume sphérique dans l'espace des k et vaut donc $4\pi k^2\,\delta k$.
donc $\delta M = 8\pi V/(2\pi)^3\,k^2\delta k = V/\pi^2\,k^2\delta k$.

$k = 2\pi\nu/c$ donc $\delta M = 8\pi V\nu^2/c^3\ \delta\nu$

4. Énergie volumique du corps noir

La cavité contient δM modes contenant chacun l'énergie $E_\nu = h\nu/(e^{h\nu/kT} - 1)$ dans chaque intervalle de fréquence $\delta\nu$

L'énergie contenue dans l'intervalle de fréquence $\delta\nu$ est donc

$\delta E = 8\pi V\nu^2/c^3\ \ h\nu/(e^{h\nu/kT} - 1)\ \ \delta\nu$

$dE = 8\pi V h\nu^3/\ (c^3(e^{h\nu/kT} - 1)\ )\ \delta\nu$

Energie volumique par intervalle de fréquence dv : $dE = \delta E/V$

$$\mathbf{dE = 8\pi h\nu^3/\ (c^3\ (e^{h\nu/kT} - 1)\ )\ d\nu}$$

<u>Énergie volumique par intervalle de pulsation dω</u>

$\nu = \omega/2\pi$ donc $d\nu = d\omega/2\pi$. On a alors $dE = 16\pi^2\ \hbar\omega^3/(c^3\ (e^{\hbar w/kT} - 1)\ )d\omega/16\pi^4$

$dE = \hbar\omega^3/(\pi^2c^3\ (e^{\hbar w/kT} - 1)\ )d\omega$ avec $\hbar = h/2\pi$

$$\mathbf{dE = \hbar\omega^3/(\pi^2c^3\ (e^{\hbar w/kT} - 1)\ )d\omega}$$

<u>Énergie volumique par intervalle de longueur d'onde dλ</u>

$\lambda = c/\nu$ ou $\nu = c/\lambda$ donc $d\nu = (-)\ c/l^2\ d\lambda$. On a alors $dE = 8\pi\ hc^3/(\lambda^3c^3\ (e^{hc/k\lambda T} - 1)\ )\ c/\lambda^2\ d\lambda$.

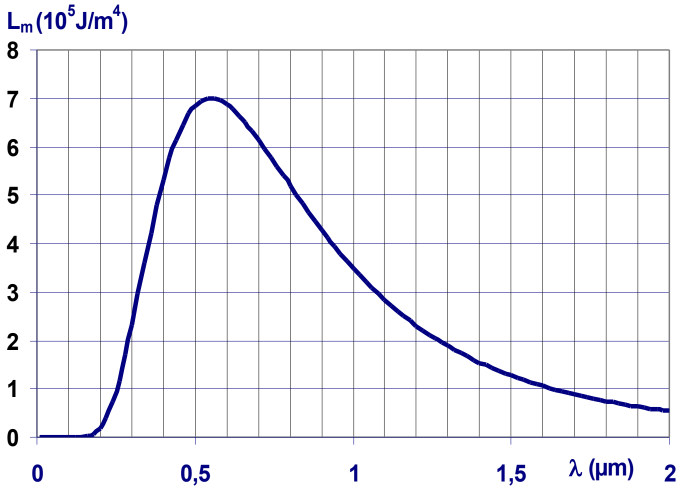
$$\mathbf{dE = 8\pi hc/(\lambda^5(e^{hc/k\lambda T} - 1)\ )d\lambda}$$

Loi d'émission du corps noir (loi de Planck)

<u>Énergie volumique par intervalle de longueur d'onde</u>

$$\frac{dE}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\ \frac{1}{(\ e^{hc/k\lambda T} - 1\ )}$$

Courbe dE/dλ = f (λ)   (T = 5000°C)



5. Loi de Wien

La courbe passe par un maximum quand $\lambda^5\ (\ e^{hc/k\lambda T} - 1\ )$ passe par un minimum.

On dérive par rapport à λ : $5\lambda^4(\ e^{hc/k\lambda T} - 1\ ) - \lambda^5\ hc/(k\lambda^2T\ )e^{hc/k\lambda T} = 0$

On simplifie par λ^4 : $5\ (\ e^{hc/k\lambda T} - 1\ ) - hc/(k\lambda T\ )\ e^{hc/k\lambda T} = 0$ donc

$(\ 5 - hc/(k\lambda T\ ))\ e^{hc/k\lambda T} - 5\ = 0$

On pose $hc/(k\lambda T) = u$

$(\ 5 - u\ )\ e^{u} - 5\ = 0$

On pose $5 - u = x$

alors $x e^{5-x} = 5$ donc $x e^{5} e^{-x} = 5$ et ainsi $e^{5}/5 \; x = e^{x}$

Il reste à résoudre cette équation, ce qui n'est pas si évident si on ne veut pas le faire numériquement.

La solution est le point de concours inférieur des courbes $y = e^{5}/5 \; x$ et $y = e^{x}$
ce qui fait à peu près $y = 30 x$ et $y = e^{x}$. Manifestement, y est voisin de 1 et donc x voisin de 1/30

Comme $x << 1$, On peut développer e^{x} en série de Taylor au 2ème ordre : $e^{x} = 1 + x + x^2/2$

Donc $1 + x + x^2/2 = e^{5}/5 \; x$

$x^2 - 2(e^{5}/5 - 1) x + 2 = 0$

La solution est donc $x = (e^{5}/5 - 1) - ((e^{5}/5 - 1)^2 - 2)^{1/2} = 0,03488552$ (La détermination numérique donne 0,03488576825557236963 donc l'approximation est plutôt bonne)

$u = hc/(k\lambda T) = 5 - x = 4,965114231744276303 7$

$\lambda = hc/(4,9651142317442763037 \; kT) = 2,8977686 \times 10^{-3}/T$, c'est la loi du déplacement de Wien

Loi de Wien

$$\boldsymbol{\lambda_{max} = 2897,77 \times 10^{-6}/T}$$

6. Intensité lumineuse en fonction de la fréquence

L'intensité lumineuse I est la puissance lumineuse par m² à la fréquence ν à l'intérieur du corps noir

C'est l'énergie produite en une seconde à la fréquence ν par une section 1 m² , c'est donc l'énergie contenue dans un volume de section 1 m² et de longueur c: V = c

C'est donc $I (\nu) = V \; dE/ d\nu = c \; dE/ d\nu = 8\pi h\nu^3 /(c^2(e^{h\nu/kT} - 1))$ ou

$I (\omega) = c \; dE/d\omega = \hbar\omega^3/(\pi^2 c^2 (e^{\hbar\omega/kT} - 1))$

$$\boldsymbol{I (\nu) = 8\pi h\nu^3/(c^2(e^{h\nu/kT} - 1))} \quad \textbf{ou}$$
$$\boldsymbol{I (\omega) = \hbar\omega^3/(\pi^2 c^2(e^{\hbar\omega/kT} - 1))}$$

7. Loi de Stefan-Boltzmann

La loi de Stefan-Boltzmann (ou loi de Stefan) donne la puissance lumineuse sortant du corps noir par une surface de 1 m²

Cette énergie est le quart de l'énergie à la fréquence ν contenue dans un volume V de section 1 m² et de longueur c.1s : V = c

C'est donc le quart de l'intensité lumineuse à la fréquence ν.

Pourquoi le quart ? Parce que la moitié de la lumière se déplace vers l'arrière et que la lumière qui vient vers l'avant se propage dans toutes les directions, il y a donc un facteur cosinus qui donne à nouveau un facteur 1/2.

C'est donc l'intégrale sur toutes les ν de la fonction $I(\nu)/4 = 2\pi h\nu^3/(c^2(e^{h\nu/kT} - 1))$

$$P = \int_0^\infty I(\nu)/4 \; d\nu = \int_0^\infty 2\pi h\nu^3/(c^2(e^{h\nu/kT} - 1)) \; d\nu$$

On pose $u = h\nu/kT$, on a alors

$I \, d\nu = 2\pi h(kTu/h)^3/c^2 / (e^{u} - 1) \; kT/h \; du = 2\pi k^4 T^4/h^3/c^2 \; u^3/(e^{u} - 1) \, du$

donc $P = 2\pi k^4T^4/h^3/c^2 \int_0^\infty u^3/(e^u - 1)du$ or $\int_0^\infty u^3/(e^u - 1)\, du = \pi^4/15$ **,

donc $P = 2\pi^5k^4/(15\, h^3c^2)\, T^4 = \sigma T^4$ (Loi de Stefan)
La constante de Stefan-Boltzmann : $\boldsymbol{\sigma = 2\pi^5k^4/(15\, h^3c^2)} = 5{,}6703994 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}$

Loi de Stefan-Boltzmann

$\mathbf{P = \sigma T^4}$ $\quad\quad$ $\boldsymbol{\sigma = 5{,}67040 \times 10^{-8}\ W\ m^{-2}\ K^{-4}}$

8. Exemples d'applications

8.1 Détermination de l'albédo terrestre

L'albédo est la proportion d'énergie lumineuse solaire qui n'est pas absorbée par la Terre, elle est réfléchie par l'atmosphère.
Données et mesures possibles depuis la Terre :
R_T : rayon de la Terre
R_S : rayon du Soleil
d : distance Terre-Soleil
θ : diamètre apparent du Soleil = $2R_S/d$ = 32' = $9{,}308 \times 10^{-3}$ rd
T_T : Température moyenne de l'atmosphère terrestre = -18 °C = 255 K (Vive l'effet de serre !!!)
T_S : Température de surface du Soleil
l_{max} du Soleil = 0,5014 µm

$T_S = 2{,}898 \times 10^{-6}/\lambda_{max} = 5780K$ (Application de la loi de Wien)
Puissance émise par le soleil $P_0 = 4\pi R_S{}^2\sigma\, T_S{}^4$ (Application de la loi de Stefan)
Puissance reçue par la Terre $P_S = P_0\, \pi R_T{}^2/4\pi d^2 = P_0\, R_T{}^2/4d^2 = 4\pi R_S{}^2\sigma\, T_S{}^4 R_T{}^2/4d^2$
$P_S = \pi\theta^2\sigma\, T_S{}^4 R_T{}^2/4$
Puissance émise par la Terre $P_T = 4\pi R_T{}^2\sigma\, T_T{}^4$ (Application de la loi de Stefan)
$P_T/P_S = 4\pi R_T{}^2\sigma\, T_T{}^4 / (\pi\theta^2\sigma\, T_S{}^4 R_T{}^2/4) = 16/\theta^2\, (T_T/T_S)^4 = 0{,}689$
Albédo $a = 1 - P_T/P_S = 0{,}311$ (Environ 30 % de l'énergie reçue est réfléchie par l'atmosphère)

8.2 Détermination de la perte de masse du Soleil

Données :
R_S: rayon du Soleil = 696265 km
T_S : Température de surface du Soleil = 5780K
Puissance émise par le soleil $P_S = 4\pi R_S{}^2\sigma\, T_S{}^4 = 3{,}85 \times 10^{26}$ W
Masse perdue par seconde (relation d'Einstein) = $P_S/c^2 = 4{,}291 \times 10^9$ kg/s (plus de 4 millions de tonnes par seconde !!)
D'autre part, le Soleil perd aussi environ 1 million de tonnes de matière par seconde par l'intermédiaire du vent solaire.

Masse perdue par le Soleil depuis sa formation (4,6 10^9 années) :

$M = 5{,}3 \times 10^9 x\ 4{,}6 \times 10^9$ x 365,25 x 24 x 3600 $= 7{,}7 \times 10^{26}$ kg (environ 128 masses terrestres, ce qui est très peu (0,038%) par rapport à la masse du Soleil égale à 333432 masses terrestres.

Calcul de l'intégrale de $u^3/(e^u - 1)du$

Sachant que $\Sigma\, q^n = q/(1 - q) = 1/(1/q - 1)$, on a $1/(e^u - 1) = 1/(1/e^{-u} - 1) = \Sigma\, (e^{-u})^n = \Sigma\, e^{-nu}$ donc

$\int_0^\infty u^3/(e^u - 1)du$ est égale à $\int_0^\infty \Sigma\, (u^3 e^{-nu})du = \Sigma \int_0^\infty u^3 e^{-nu}\, du$

On intègre trois fois par parties, on a alors :
$\Sigma \int_0^\infty 3u^2\, e^{-nu}/n\ du$, puis $\Sigma \int_0^\infty -6u\, e^{-nu}/n^2\ du$, puis $\Sigma \int_0^\infty 6\, e^{-nu}/n^3\, du$ qui vaut $\Sigma\, 6/n^4 = 6\Sigma\, 1/n^4$

or $\Sigma\, 1/n^4 = \pi^4/90$, donc $\int_0^\infty u^3/(e^u - 1)\, du = \pi^4/15$

---

* Les Les puristes pourraient s'inquiéter d'une probabilité qui peut manifestement dépasser 1 ! Il faudrait la normaliser. En réalité, il n'y a pas lieu de s'en préoccuper puisqu'on n'utilise que le rapport des probabilités.