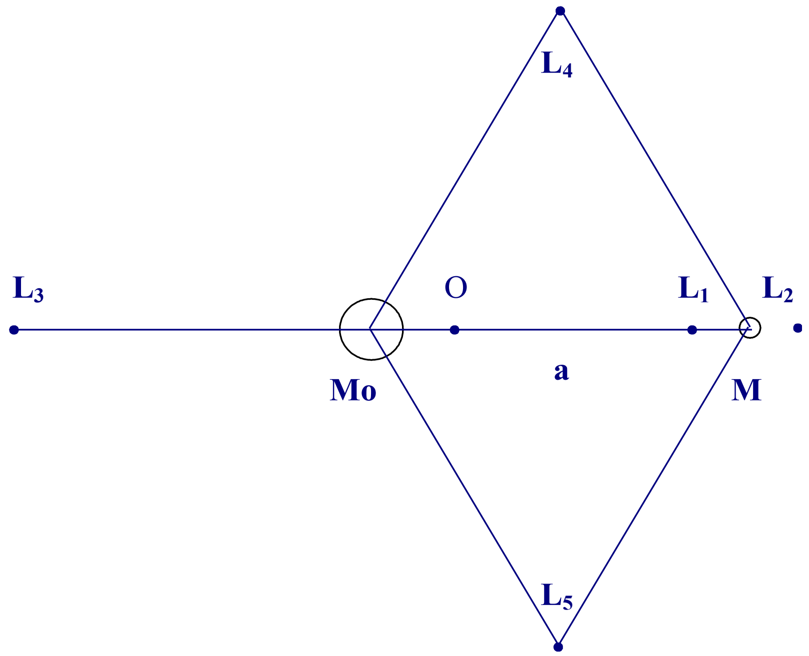
Animation

Les points de Lagrange

Animation

par Gilbert Gastebois

A. Les points de Lagrange



Mo : Soleil (Mo represente la masse et la position du Soleil)
M : Terre (M represente la masse et la position de la Terre)
O : Barycentre des masses Mo et M
m : Masse de l'astéroïde
a = MoM

M<<Mo et m<<<M (On néglige l'influence de m sur M et Mo)

L_1, L_2 et L_3 sont des points d'équilibre instables. Une masse m placée en ces points s'en écarte inexorablement à la moindre perturbation. On les appelle parfois points d'Euler.

L_4 et L_5 forment un triangle équilatéral avec Mo et M
L_4 et L_5 sont des points d'équilibre stable si M<<Mo. Une masse m placée à proximité avec une vitesse convenable gravite autour de ces points. Ce sont ces deux points que l'on désigne habituellement sous le nom de points de Lagrange.

Plusieurs satellites de Jupiter se trouvent au voisinage de ces points de Lagrange, on les désigne sous le nom de satellites troyens.

La théorie suivante suppose un mouvement quasi-circulaire de la Terre autour du Soleil.

B . Points de Lagrange L_1, L_2 et L_3

1. Point L_1

On pose $a = MMo$ $d = L_1M$ $x = d/a$ $k = M/Mo$

On étudie le mouvement dans un repère galiléen centré sur le barycentre O des deux masses Mo et M : $OM = a\,Mo/(Mo + M)$ et $OMo = a\,M/(Mo + M)$

$OM = a/(1 + k)$ et $OMo = a\,k/(1 + k)$

En L_1, m subit une force F_1 vers Mo et une force F_2 vers M

$F_1 = G\,mMo/(a - ax)^2$

$F_2 = G\,mM/(ax)^2$

D'après la 2ème loi de Newton, $\omega^2\,OL_1 = (F_1 - F_2)/m = G(Mo/(a - ax)^2 - M/(ax)^2)$

$\omega^2\,(OM - ax) = G(Mo/(a - ax)^2 - M/(ax)^2)$

$\omega^2\,(1/(1 + k) - x) = G(Mo/(1 - x)^2 - M/x^2)/a^3$

m devant être fixe par rapport à M et Mo, il faut que $\omega = \omega_0$ (ω_0 étant la vitesse angulaire des masses M et Mo autour de O)

Pour ce système à 2 corps, $\omega_0^2 = G(Mo + M)/a^3$

donc $(Mo + M)(1/(1 + k) - x) = Mo/(1 - x)^2 - M/x^2$

$(1 + k)(1/(1 + k) - x) = 1/(1 - x)^2 - k/x^2$

$1 - (1 + k)\,x = 1/(1 - x)^2 - k/x^2$

$\mathbf{(1 + k)\,x - 1 + 1/(1 - x)^2 - k/x^2 = 0}$

M étant très inférieur à Mo, $k << 1$ et $x << 1$

x est très inférieur à 1, on pourra donc utiliser l'approximation de Taylor :

$1/(1 - x)^2 = 1 + 2x$ et $k\,x$ négligeable

$x - 1 + 1 + 2x - k/x^2 = 0$

$3x = k/x^2$

$x = (k/3)^{1/3}$

$\mathbf{d = (M/(3Mo))^{1/3}\,a}$

Pour le système Soleil-Terre, on obtient $d = a/100 = 1{,}5.10^6$ km

Un calcul plus précis donne $d = (M/(3Mo))^{1/3}a\,(1 - 1/3\,(M/(3Mo))^{1/3} - 1/9\,(M/(3Mo))^{2/3})$

Ce point L_1 a un intérêt pratique pour l'observation ininterrompue du Soleil.

C'est dans ce but qu'on y a installé le satellite SOHO.

2. Point L_2

On pose $a = MMo$ $d = L_2M$ $x = d/a$ $k = M/Mo$

On étudie le mouvement dans un repère galiléen centré sur le barycentre O des deux masses Mo et M : $OM = a\,Mo/(Mo + M)$ et $OMo = a\,M/(Mo + M)$

$OM = a/(1 + k)$ et $OMo = a\,k/(1 + k)$

En L_2, m subit une force F_1 vers Mo et une force F_2 vers M

$F_1 = G\,mMo/(a + ax)^2$

$F_2 = G\,mM/(ax)^2$

D'après la 2ème loi de Newton, $\omega^2\,OL_2 = (F_1 + F_2)/m = G(Mo/(a + ax)^2 + M/(ax)^2)$

$\omega^2\,(OM + ax) = G(Mo/(a + ax)^2 + M/(ax)^2)$

$\omega^2\,(1/(1 + k) + x) = G(Mo/(1 + x)^2 + M/x^2)/a^3$

m devant être fixe par rapport à M et Mo, il faut que $\omega = \omega_0$ (ω_0 étant la vitesse angulaire des masses M et Mo autour de O)

Pour ce système à 2 corps, $\omega_0^2 = G(Mo + M)/a^3$

donc $(Mo + M)(1/(1 + k) + x) = Mo/(1 + x)^2 + M/x^2$

$(1 + k)(1/(1 + k) + x) = 1/(1 + x)^2 + k/x^2$

$1 + (1 + k)\,x = 1/(1 + x)^2 + k/x^2$

$\mathbf{(1 + k)\,x + 1 - 1/(1 + x)^2 - k/x^2 = 0}$

M étant très inférieur à Mo, $k << 1$ et $x << 1$

x est très inférieur à 1, on pourra donc utiliser l'approximation de Taylor :

$1/(1 + x)^2 = 1 - 2x$ et $k\,x$ négligeable

$x + 1 - 1 + 2x - k/x^2 = 0$

$3x = k/x^2$

$x = (k/3)^{1/3}$

$\mathbf{d = (M/(3Mo))^{1/3}\,a}$

Pour le système Soleil-Terre, on obtient $d = a/100 = 1{,}5.10^6$ km

L_2 est quasi-symétrique de L_1 par rapport à M

Un calcul plus précis donne $d = (M/(3Mo))^{1/3}\,a\,(1 + 1/3\,(M/(3Mo))^{1/3} - 1/9\,(M/(3Mo))^{2/3})$

Ce point L_2 a un intérêt pratique pour l'observation ininterrompue de l'Univers. Il existe plusieurs projets d'y installer des satellites d'observation.

C'est notamment le cas du satellite Planck qui observe le fond diffus cosmologique. Il tourne en permanence le dos à la Terre et au Soleil qui sont en permanence alignés derrière lui. Ses instruments qui doivent être maintenus à très basse température (0,1 K pour l'un d'eux !) peuvent pointer en permanence à leur opposé et ils sont en grande partie protégés des rayons du Soleil par la Terre.

3. Point L_3

On pose $a = MMo$ $d = L_3Mo$ $x = d/a$ $k = M/Mo$

On étudie le mouvement dans un repère galiléen centré sur le barycentre O des deux masses Mo et M : $OM = a\ Mo/(Mo + M)$ et $OMo = a\ M/(Mo + M)$

$OM = a/(1 + k)$ et $OMo = a\ k/(1 + k)$

En L_3, m subit une force F_1 vers Mo et une force F_2 vers M

$F_1 = G\ mMo/(ax)^2$

$F_2 = G\ mM/(a + ax)^2$

D'après la 2ème loi de Newton, $\omega^2\ OL_3 = (F_1 + F_2)/m = G(Mo/(ax)^2 + M/(a + ax)^2)$

$\omega^2\ (OMo + ax) = (F_1 + F_2)/m = G(Mo/(ax)^2 + M/(a + ax)^2)$

$\omega^2\ (k/(1 + k) + x) = G(\ Mo/x^2 + M/(1 + x)^2)/a^3$

m devant être fixe par rapport à M et Mo, il faut que $\omega = \omega_0$ (ω_0 étant la vitesse angulaire des masses M et Mo autour de O)

Pour ce système à 2 corps, $\omega_0^{\,2} = G(Mo + M)/a^3$

donc $(Mo + M)(k/(1 + k) + x) = Mo/x^2 + M/(1 + x)^2$

$(1 + k)(k/(1 + k) + x) = 1/x^2 + k/(1 + x)^2$

$k + (1 + k)\ x = 1/x^2 + k/(1 + x)^2$

$\mathbf{(1 + k)\ x + k - k/(1 + x)^2 - 1/x^2 = 0}$

M étant très inférieur à Mo, $k << 1$ et $e = 1 - x << 1$

e étant très inférieur à 1, on pourra donc utiliser l'approximation de Taylor :

$1/(1 - e)^2 = 1 + 2e$ (k e négligeable)

$(1 + k)(1 - e) + k - k/(4(1 - e/2)^2) - 1/(1 - e)^2 = (1 + k)(1 - e) + k - k/4 - 1 - 2e$

$= 1 - e + k + k - k/4 - 1 - 2e = - 3e + 7k/4 = 0$

$e = 7k/12$

$\mathbf{d = a - e\ a = (1 - 7M/(12Mo))\ a}$

$OL_3 = OMo + d = a\ k/(1 + k) + a - 7k/12\ a = a\ k + a - 7k/12\ a$ (k^2 négligeable)

$OL_3 = a + 5k/12\ a$

$\mathbf{OL_3 = (1 + 5M/(12Mo))\ a}$

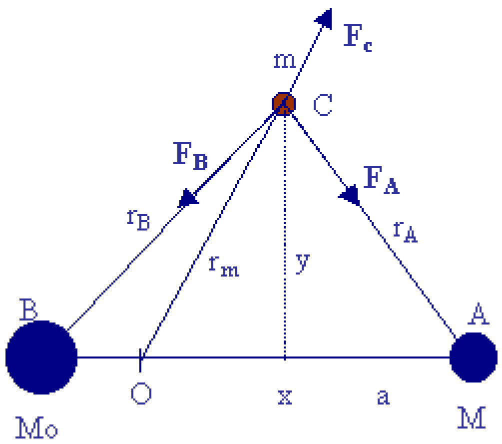
Pour le système Soleil-Terre, on obtient un écart de $1{,}25.10^{-6}\ a = 190$ km (ce qui est plutôt faible !) par rapport à la trajectoire qu'on aurait sans l'influence de la Terre.

En réalité, ce point L_3 n'a pas d'application pratique, il est trop éloigné de la Terre et ne subit pratiquement pas son action, il est même souvent plus proche des planètes voisines que de la Terre et subit donc davantage leur influence que la sienne.

C. Points de Lagrange L_4 et L_5

1. Détermination directe des points L_4 et L_5

1.1 Schéma



a = AB
M = k Mo = k/(1 + k) (Mo + M)
Mo = 1/(1 + k) (Mo + M)
OB = ka/(1+k)
OA = a/(1+k)

$\Omega^2 = G (Mo+M) / a^3$

1.2 Équilibre de m

Pour qu'il y ait une position d'équilibre dans le repère tournant avec les masses Mo et M, il faut que la somme des forces dans ce repère s'y annule. Dans ce repère, la masse m est soumise à trois forces, les deux forces d'attraction gravitationnelle et la force centrifuge (la masse m étant immobile dans le repère tournant, il n'y a pas de force de Coriolis).

$F_A = GmM/CA^2 = GmM/r_A^2 = Gm\, k\, (Mo + M)/(1 + k)/r_A^2 = m\, \Omega^2 a^3 k /(1 + k)/r_A^2$

$F_B = GmMo/CB^2 = GmMo/r_B^2 = Gm\, (Mo + M)/(1 + k)/r_B^2 = m\, \Omega^2 a^3 /(1 + k)/r_B^2$

$Fc = m\, \Omega^2\, OM = m\, \Omega^2 r_m$

A l'équilibre $\mathbf{F_A + F_B + Fc = 0}$

On projète sur les deux axes x et y

$F_{Ax} + F_{Bx} + Fc_x = 0$

$F_{Ay} + F_{By} + Fc_y = 0$

$F_{Ax} = F_A \sin\alpha = m\, \Omega^2 a^3 k /(1 + k)/r_A^2 \;\; (OA - x)/r_A = m\, \Omega^2 a^3 k\, (a/(1+k) - x) /(1 + k)/r_A^3$

$F_{Bx} = - F_B \sin\beta = - m\, \Omega^2 a^3 /(1 + k)/r_B^2 \;\; (OB + x)/r_B = - m\, \Omega^2 a^3 (ka/(1+k) + x) /(1 + k)/r_B^3$

$Fc_x = Fc \sin\delta = m\, \Omega^2 r_m \;\; x/r_m = m\, \Omega^2 x$

donc : $\mathbf{k\, a^3 (a/(1+k) - x) /(1 + k)/r_A^3 - a^3 (ka/(1+k) + x) /(1 + k)/r_B^3 + x = 0}$ **(relation 1)**

$F_{Ay} = - F_A \cos\alpha = - m\, \Omega^2 a^3 k /(1 + k)/r_A^2\; y/r_A = - m\, \Omega^2 a^3 k\, y /(1 + k)/r_A^3$

$F_{By} = - F_B \cos\beta = - m\, \Omega^2 a^3 /(1 + k)/r_B^2\; y /r_B = - m\, \Omega^2 a^3 y/(1 + k)/r_B^3$

$Fc_y = Fc \cos\delta = m\, \Omega^2 r_m \;\; y/r_m = m\, \Omega^2 y$

donc : $\mathbf{- k\, a^3 /(1 + k)/r_A^3 - a^3 /(1 + k)/r_B^3 + 1 = 0}$ **(relation 2)**

La relation 2 possède une solution évidente : $\mathbf{r_A = r_B = a}$

donc $\mathbf{y = 3^{1/2}/2\; a}$ et $x = a/2 - OB = a/2 - ka/(1+k)$

$\mathbf{x = a(1 - k)/(2(1 + k))}$

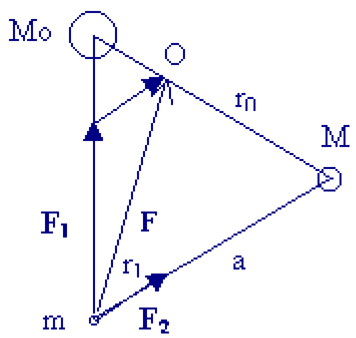
Il faut aussi que la relation 1 soit vérifiée

$k\,a^3\,(a/2)\,/(1+k)/a^3\;-\;a^3\,(a/2)\,/(1+k)/a^3\;+\;a(1-k)/(2(1+k))\;=$
$a(k-1)/(2(1+k))\;+\;a(1-k)/(2(1+k))\;=0$
La relation est bien vérifiée.

Les deux points L_4 et L_5 se trouvent aux sommets d'un triangle équilatéral dont la base est la distance entre les deux masses Mo et M

2. Autre méthode

2.1 Schéma



Mo : masse du Soleil
M : masse de la Terre < Mo
m : masse de l'astéroïde << M (On néglige l'influence de m sur M et Mo)
m est placé au sommet du triangle équilatéral de base MMo = a
M et Mo tournent sur un cercle centré sur leur barycentre O tel que :
$OM = r_0 = a\,Mo/(Mo+M)$
La vitesse angulaire de rotation de la Terre (et du Soleil) est Ω.
La 2ème loi de Newton donne $\Omega^2/r_0 = G\,Mo/a^2$ donc $\Omega^2 = G\,(Mo+M)/a^3$ (1)
La loi de la gravitation donne :
$F_1 = G\,m\,Mo/a^2$
$F_2 = G\,m\,M/a^2$
m est immobile par rapport à M et Mo si elle tourne sur un cercle de centre O et de rayon r_1 avec la même vitesse angulaire que la Terre $\omega_1 = \Omega$

2.2 Direction de la force F

$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$
Comme le triangle est équilatéral et d'après Thalès, l'extrémité de F coupe MMo en un point O' qui sépare MMo en deux parties telles que $MoO'/MO' = F_2/F_1$
$F_1 = G\,m\,Mo/a^2$
$F_2 = G\,m\,M/a^2$
donc $MoO'/MO' = M/Mo$ ce qui est la définition du barycentre de M et Mo et donc O' est confondu avec O le centre de rotation et donc la somme des forces $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$ pointe vers O. La force est donc centrale ce qui autorise m à se déplacer sur un cercle si sa vitesse angulaire a la bonne valeur. Et si par un hasard miraculeux, cette vitesse angulaire était égale à celle de la Terre et du Soleil autour de O, la masse m serait immobile par rapport au système Soleil-Terre ! Eh, bien, c'est ce qu'on va démontrer.

2.3 Calcul de la force F

$\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$

$F^2 = \mathbf{F_1}.\mathbf{F_2} = F_1^2 + F_2^2 + 2\ F_1F_2 \cos 60° = F_1^2 + F_2^2 + F_1F_2$

$F_1 = G\ m\ Mo/a^2$

$F_2 = G\ m\ M/a^2$

donc $F^2/m^2 = G^2(Mo^2 + M^2 + MoM)/a^4 = G^2M'^2/a^4$ en posant : $(Mo^2 + M^2 + MoM) = M'^2$

$\mathbf{F/m = GM'/a^2}$

2.4 Calcul du rayon r_1

Dans le triangle mMoO, le théorème de Pythagore généralisé donne

$r_1^2 = a^2 + (a-r_0)^2 - 2\ a(a-r_0)\cos 60° = a^2 + (a-r_0)^2 - a(a-r_0)$

On développe : $r_1^2 = a^2 + a^2 + r_0^2 - 2ar_0 - a^2 + ar_0 =$

$a^2 + r_0^2 - ar_0 = a^2 + a^2M^2/(Mo+M)^2 - a^2\ M/(Mo+M)$

On met au même dénominateur : $r_1^2 = a^2((Mo+M)^2 + M^2 - M^2 - MMo)/(Mo+M)^2 =$

$a^2(Mo^2 + M^2 + MMo)/(Mo+M)^2 = a^2\ M'^2/(Mo+M)^2$

$\mathbf{r_1 = a\ M'/(Mo + M)}$

2.5 Calcul de la vitesse angulaire ω_1

D'après la 2ème loi de Newton, m tourne sur un cercle de centre O et de rayon r_1 sous l'action de la force centrale F si :

$\omega_1^2\ r_1 = F/m = GM'/a^2$ donc $\omega_1^2 = GM'/(a^2\ r_1) = GM'(Mo + M)/(M'a^3) = G(Mo + M) / a^3$

$\mathbf{\omega_1^2 = G(Mo + M) / a^3}$

or il se trouve que c'est la valeur de Ω^2 ! (cf. Relation 1) donc $\mathbf{\omega_1 = \Omega}$

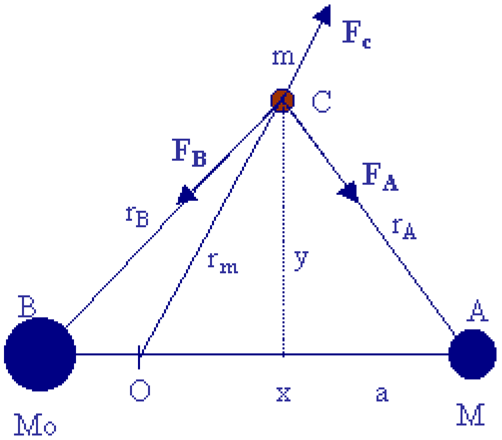
Il apparaît donc qu'une masse m placée au point de Lagrange L_4 ou L_5 et se déplaçant à la vitesse angulaire de la Terre et du Soleil autour du centre de rotation du système Terre-Soleil se déplace sur un cercle autour de ce point et par conséquent reste au sommet du triangle équilatéral qu'elle forme avec les deux astres. Elle est donc immobile par rapport à la Terre et au Soleil.

Ces 2 positions sont stables. Si on écarte légèrement la masse m, la somme de F, de la force centrifuge et de la force de Coriolis pointe vers L_4 ou L_5, si la masse tourne dans le sens inverse de la rotation des planètes. La masse semble donc "attirée" par les deux points de Lagrange. Elle va donc graviter autour, on appelle ce mouvement la libration de l'astéroïde.

Aucun astéroïde ne se trouvant aux points L_4 et L_5 du système Soleil-Terre ou du système Terre-Lune, on a pensé y installer des satellites d'observation, malheureusement, en y regardant de plus près, on y a découvert une grande accumulation de poussières.... et pas évident d'y passer le plumeau.

3. Extremum d'énergie potentielle.

3.1 Schéma



$a = AB$

$M = k\,Mo = k/(1+k)\ (Mo+M)$

$Mo = 1/(1+k)\ (Mo+M)$

$OB = k/(1+k)\ a$

$OA = 1/(1+k)\ a$

$\Omega^2 = G\,(Mo+M) / a^3$

3.2 Expression de Ep

Si la somme des forces peut s'annuler, c'est qu'il y existe un extremum de l'énergie potentielle. On se place dans un repère tournant avec les deux astres M et Mo. Dans ce repère, la masse m est soumise à trois forces, les deux forces d'attraction gravitationnelle et la force centrifuge (la masse m étant immobile dans le repère tournant, il n'y a pas de force de Coriolis).

$F_A = GmM/CA^2 = GmM/r_A{}^2$

$F_B = GmMo/CB^2 = GmMo/r_B{}^2$

$Fc = m\,\Omega^2\,OM = m\,\Omega^2\,r_m$

On fait dériver ces trois forces d"un potentiel.

$F_A = -\,GmM/r_A{}^2 = -\,dEp/dr_A$ donc $Ep_A = -\,GmM/r_A$

$F_B = -\,GmMo/r_B{}^2 = -\,dEp/dr_B$ donc $Ep_B = -\,GmMo/r_B$

$F_c = m\,\Omega^2\,r_m = -\,dEp/dr_m$ donc $Ep_c = -\,m\,\Omega^2\,r_m{}^2/2$

$Ep = -\,(GmM/r_A + GmMo/r_B + m\,\Omega^2\,r_m{}^2/2) =$

$-\,mG(M/r_A + Mo/r_B + (Mo+M)/a^3\ r_m{}^2/2)$ car $\Omega^2 = G(Mo+M)/a^3$

$r_A = ((OA - x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = ((a/(1+k) - x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$r_B = ((OB + x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = ((ka/(1+k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$

$r_m = (x^2 + y^2)^{1/2}$

$Ep = -\,mG((k/(1+k)\ (Mo+M)/r_A + 1/(1+k)\,(Mo+M)/r_B + (Mo+M)/a^3\ (x^2+y^2)/2))$

$Ep = -\,mG(Mo+M)\ (k/(1+k)\,/r_A + 1/(1+k)/r_B + (x^2+y^2)/(2a^3))$

$\mathbf{Ep = -\,mG(Mo+M)\ (k/(1+k)/((a/(1+k) - x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + 1/(1+k)/((ka/(1+k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + (x^2+y^2)/(2\,a^3))}$

$\mathbf{Ep = -\,m\Omega^2 a^3(k/(1+k)\,/((a/(1+k) - x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + 1/(1+k)/\,((ka/(1+k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{1/2} + (x^2+y^2)/(2\,a^3))}$

3.3 Positions des points de Lagrange L_4 et L_5

Il n'y a plus qu'à dériver Ep et à chercher la valeur de x qui l'annule pour un y donné pour z = 0

$dEp/dx = - m\Omega^2a^3 (k(a/(1 + k) - x)/(1 + k)/((a/(1 + k) - x)^2 + y^2)^{3/2} -$
$(ka/(1 + k) + x)/(1 + k)/((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2)^{3/2} + x/a^3) = 0$

L'espoir de sortir rapidement une solution de cette équation est ténu... aussi, au lieu de se lancer dans ce guêpier, on va réfléchir...

On aurait une équation beaucoup plus simple si les arguments des deux racines étaient égaux, alors pourquoi ne pas tester cette solution ? On ne sait jamais, si on avait de la chance...

On fait donc $a/(1 + k) - x = ka/(1 + k) + x$ donc $2 x = a/(1 + k) - ka/(1 + k) = (1 - k)a/(1 + k)$
$x = (1 - k)a/(2(1 + k))$ et $a/(1 + k) - x = ka/(1 + k) + x = a/2$

$k(a/(1 + k) - x)/(1 + k)/((a/(1 + k) - x)^2 + y^2)^{3/2} - (ka/(1 + k) + x)/(1 + k)/((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2)^{3/2} + x/a^3 = 0$

$(ka/(1 + k) - ka/(1 + k) - k x - x)/(1 + k)/(a^2/4 + y^2)^{3/2} + x/a^3 = - x/(a^2/4 + y^2)^{3/2} + x/a^3 = 0$

donc $1/(a^2/4 + y^2)^{3/2} = 1/a^3$ ou

$a^2/4 + y^2 = a^2$ donc $y^2 = 3a^2/4$ et $y = \pm 3^{1/2} a/2$ ce qui correspond à la hauteur d'un triangle équilatéral de base a

La position $x = (1- k)/(2(1 + k))$ est à la distance d de B :

$d = B0 + x = ka/(1 + k) + (1 - k)a/(2(1 + k)) = a/2$

Les points de coordonnées : $x_0 = (1 - k)a/(2(1 + k))$ et $y_0 = \pm 3^{1/2} a/2$ qui se trouvent aux sommets d'un triangle équilatéral dont la base est la distance entre les deux masses Mo et M sont des extrema le long de l'axe des x, mais ce ne seront des extrema de Ep que s'ils sont aussi des extrema le long de l'axe des y. Il faut donc que $(dEp/dy)_{x0,\pm y0}$ soit nul, est-ce le cas ?

$(dEp/dy)_{x0} = - mG(Mo+M) (- ky/(1 + k) /(a^2/4 + y^2)^{3/2} - y/(1 + k)/(a^2/4 + y^2)^{3/2} + y/a^3) = 0$

$- y/(a^2/4 + y^2)^{3/2} + y/a^3 = 0$ donc $a^2/4 + y^2 = a^2$ donc $y^2 = 3a^2/4 = y_0^2$ et $y = \pm y_0$

$(dEp/dy)_{x0,\pm y0} = 0$ et $(dEp/dx)_{x0,\pm y0} = 0$ donc les points de coordonnées $x_0, \pm y_0$ sont bien des extrema d'énergie potentielle, ce sont les points de Lagrange L_4 et L_5

Les deux points L_4 et L_5 se trouvent aux sommets d'un triangle équilatéral dont la base est la distance entre les deux masses Mo et M

Remarque : On lit souvent que les points L_4 et L_5 sont des points d'équilibre stable parce qu'on aurait là un minimum local de l'énergie potentielle, mais il n'y a aucun minimum local, ce sont des maxima d'énergie potentielle. Cependant, si $k < 0{,}04$, une masse placée en ces points peut rester éternellement dans son voisinage car dès qu'elle quitte le point , la force de Coriolis l'oblige à tourner et à rester au voisinage du point.

3.4 Mouvement de libration autour des points de Lagrange L_4 et L_5

Une masse m placée à proximité d'un point de Lagrange (en $x_0 + x, y_0 + y , z_0 + z$) subit une force résiduelle **f** telle que :

$\mathbf{f} = \mathbf{F_0} + \mathbf{\Delta F}$ avec $F_0 = 0$ (au point de Lagrange, les forces s'équilibrent exactement)

$f_x = (\delta F_x/\delta x)_0\, x + (\delta F_x/\delta y)_0\, y + (\delta F_x/\delta z)_0\, z = - (\delta^2E_p/\delta x^2)_0\, x - (\delta^2E_p/\delta x\delta y)_0\, y - (\delta^2E_p/\delta x\delta z)_0\, z$
$f_y = (\delta F_y/\delta y)_0\, y + (\delta F_y/\delta x)_0\, x + (\delta F_y/\delta z)_0\, z = - (\delta^2E_p/\delta y^2)_0\, y - (\delta^2E_p/\delta x\delta y)_0\, x - (\delta^2E_p/\delta y\delta z)_0\, z$
$f_z = (\delta F_z/\delta z)_0\, z + (\delta F_z/\delta x)_0\, x + (\delta F_z/\delta y)_0 y = - (\delta^2E_p/\delta z^2)_0\, z - (\delta^2E_p/\delta x\delta z)_0\, x - (\delta^2E_p/\delta y\delta z)_0\, y$
x, y et $z << a$

$\delta^2E_p/\delta x^2 = -m\Omega^2a^3\,((k(2(a/(1+k)-x)^2-y^2-z^2)/((a/(1+k)-x)^2+y^2+z^2)^{5/2} + (2(ka/(1+k)+x)^2-y^2-z^2)/((ka/(1+k)+x)^2+y^2+z^2)^{5/2})/(1+k)+1/a^3)$

$\delta^2E_p/\delta y^2 = -m\Omega^2a^3\,((k(2y^2-(a/(1+k)-x)^2-z^2)/((a/(1+k)-x)^2+y^2+z^2)^{5/2} + (2y^2-(ka/(1+k)+x)^2-z^2)/((ka/(1+k)+x)^2+y^2+z^2)^{5/2})/(1+k)+1/a^3)$

$\delta^2E_p/\delta z^2 = -m\Omega^2a^3\,(k(2z^2-(a/(1+k)-x)^2-y^2)/((a/(1+k)-x)^2+y^2+z^2)^{5/2} + (2z^2-(ka/(1+k)+x)^2-y^2)/((ka/(1+k)+x)^2+y^2+z^2)^{5/2})/(1+k)$

$\delta^2E_p/\delta y\delta x = \delta^2E_p/\delta x\delta y = -m\Omega^2a^3\,(3k\,(a/(1+k)-x)\,y/((a/(1+k)-x)^2+y^2+z^2)^{5/2} - 3\,(ka/(1+k)+x)\,y/((ka/(1+k)+x)^2+y^2+z^2)^{5/2})/(1+k)$

$\delta^2E_p/\delta z\delta x = \delta^2E_p/\delta x\delta z = -m\Omega^2a^3\,(3k\,(a/(1+k)-x)\,z/((a/(1+k)-x)^2+y^2+z^2)^{5/2} - 3\,(ka/(1+k)+x)\,z/((ka/(1+k)+x)^2+y^2+z^2)^{5/2})/(1+k)$

$\delta^2E_p/\delta y\delta z = \delta^2E_p/\delta z\delta y = -m\Omega^2a^3\,(3k\,yz/((a/(1+k)-x)^2+y^2+z^2)^{5/2} + 3\,yz/((ka/(1+k)+x)^2+y^2+z^2)^{5/2})/(1+k)$

Au point de Lagrange, $a/(1+k) - x_0 = ka/(1+k) + x_0 = a/2$, $y_0^2 = 3\,a^2/2$ et $z_0 = 0$

$(\delta^2E_p/\delta x^2)_0 = -3/4\ m\Omega^2$ $\quad(\delta^2E_p/\delta y^2)_0 = -9/4\ m\Omega^2$ $\quad(\delta^2E_p/\delta z^2)_0 = m\Omega^2$

$(\delta^2E_p/\delta x\delta y)_0 = -3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\ m\Omega^2$ $\quad(\delta^2E_p/\delta z\delta x)_0 = (\delta^2E_p/\delta y\delta z)_0 = 0$

$f_x = 3/4\ m\Omega^2 x + 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\ m\Omega^2 y$

$f_y = 9/4\ m\Omega^2 y + 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\ m\Omega^2 x$

$f_z = -\,m\Omega^2 z$

Dans le repère tournant avec la masse m, elle subit donc la force **f** et la force de Coriolis

$\mathbf{F_c} = 2\,m\,\mathbf{v_r} \times \mathbf{\Omega}$

La deuxième loi de Newton donne : $m\,\mathbf{a_r} = \mathbf{f} + 2\,m\,\mathbf{v_r} \times \mathbf{\Omega}$ (La force centrifuge est intégrée dans **f**)

Sur ox : $m\,a_x = m\,x'' = 3/4\ m\,\Omega^2 x + 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\ m\Omega^2 y + 2\,m\,y'\,\Omega$

Sur oy : $m\,a_y = m\,y'' = 9/4\ m\,\Omega^2 y + 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\ m\Omega^2 x - 2\,m\,x'\,\Omega$

Sur oz : $m\,a_z = m\,z'' = -\,m\Omega^2 z$

$x'' - 3/4\ \Omega^2 x - 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\,\Omega^2 y - 2\,y'\,\Omega = 0$

$y'' - 9/4\ \Omega^2 y - 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\,\Omega^2 x + 2\,x'\,\Omega = 0$

$z'' + \Omega^2 z = 0$ dont la solution est $z = c_3 \sin\Omega t + c'_3 \cos\Omega t$

On teste $x = c\,e^{j\omega t}$ et $y = d\,e^{j\omega t}$

$-\omega^2 c - 3/4\ \Omega^2 c - 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\,\Omega^2 d - j\,2\omega\Omega d = 0$

$-\omega^2 d - 9/4\ \Omega^2 d - 3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\,\Omega^2 c + j\,2\omega\Omega c = 0$

Ces deux relations sont vraies si :

$(-\omega^2 - 3/4\ \Omega^2)(-\omega^2 - 9/4\ \Omega^2) - (3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\,\Omega^2 + j\,2\omega\Omega)(3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\,\Omega^2 - j\,2\omega\Omega) = 0$

$\omega^4 - \Omega^2\omega^2 + 27/16\ \Omega^4 - (3/4(3)^{1/2}\,(1-k)/(1+k)\,\Omega^2)^2 = 0$ donc les solutions sont :

$\omega^2 = 1/2(\ \Omega^2 \pm (\Omega^4 - 27/4\ \Omega^4 + 27/4\,(1-k)^2/(1+k)^2\,\Omega^4)^{1/2}) = 1/2\,\Omega^2(1 \pm (1 - 27\,k/(1+k)^2)^{1/2})$

$\boldsymbol{\omega^2 = 1/2\,\Omega^2(1 \pm (1 - 27\,k/(1+k)^2)^{1/2})}$

Pour avoir une solution périodique, il faut que les ω soient réels, sinon on aurait une exponentielle divergente. Pour cela, il faut que $1 - 27\,k/(1+k)^2 >= 0$

$27\,k/(1+k)^2 <= 1$ donc $27\,k <= (1+k)^2 = 1 + 2\,k + k^2$

$1 - 25\,k + k^2 >= 0$. Pour cela il faut que $k <= (25 - 3(69)^{1/2})/2 = 0{,}0400642$

(ou $k_2 >= (25 + 3(69)^{1/2})/2 = 24{,}96 = 1/k$)

La masse m restera autour du point de Lagrange si la masse M est inférieure à 0,04006 Mo

$\boldsymbol{\omega_1 = 1/2^{1/2} \ (1 + (1 - 27\,k/(1+k)^2)^{1/2})^{1/2} \ \Omega}$

$\boldsymbol{\omega_2 = 1/2^{1/2} \ (1 - (1 - 27\,k/(1+k)^2)^{1/2})^{1/2} \ \Omega}$

On a donc :

$x = c_1\, e^{j\omega 1t} + c_2\, e^{j\omega 2t} + \mathbf{c'_1}\, e^{-j\omega 1t} + \mathbf{c'_2}\, e^{-j\omega 2t}$

$y = d_1\, e^{j\omega 1t} + d_2\, e^{j\omega 2t} + d'_1\, e^{-j\omega 1t} + d'_2\, e^{-j\omega 2t}$

Pour avoir la solution générale, on choisit c_1,c_2 réels et $\mathbf{c'_1}$ et $\mathbf{c'_2}$ imaginaires purs.

(On pose $\mathbf{c'_1} = j\, c'_1$ et $\mathbf{c'_2} = j\, c'_2$)

On remplace x et y dans l'une des équations différentielles. On obtient , en posant $K = 3/4(3)^{1/2}\,(1 - k)/(1 + k)$ pour simplifier l'écriture.

$d_1 = c_1\,(-A + j\,B)$ $\quad A = K\,(\omega_1^2 + 3/4\,\Omega^2)/(K^2\Omega^2 + 4\,\omega_1^2)$

$B = 2\omega_1/\Omega\ (\omega_1^2 + 3/4\,\Omega^2)/(K^2\,\Omega^2 + 4\,\omega_1^2)$

$d_2 = c_2\,(-C + j\,D)$ $\quad C = K\,(\omega_2^2 + 3/4\,\Omega^2)/(K^2\,\Omega^2 + 4\,\omega_2^2)$

$D = 2\omega_2/\,\Omega\ (\omega_2^2 + 3/4\,\Omega^2)/(K^2\,\Omega^2 + 4\,\omega_2^2)$

$d'_1 = j\,c'_1\,(-A - j\,B) = c'_1\,(B - j\,A)$

$d'_2 = j\,c'_2\,(-C - j\,D) = c'_2\,(D - j\,C)$

On prend les parties réelles de x et y

$\boldsymbol{x = c_1 \cos \omega_1 t + c'_1 \sin \omega_1 t + c_2 \cos \omega_2 t + c'_2 \sin \omega_2 t}$

$\boldsymbol{y = (B\,c'_1 - A\,c_1) \cos \omega_1 t - (B\,c_1 + A\,c'_1) \sin \omega_1 t - (C\,c_2 - D\,c'_2) \cos \omega_2 t -}$

$\boldsymbol{(C\,c'_2 + D\,c_2) \sin \omega_2 t}$

$\boldsymbol{z = c_3 \sin \Omega t + c'_3 \cos \Omega t}$

$\boldsymbol{v_x = -c_1\,\omega_1 \sin \omega_1 t + c'_1\,\omega_1 \cos \omega_1 t - c_2\,\omega_2 \sin \omega_2 t + c'_2\,\omega_2 \cos \omega_2 t}$

$\boldsymbol{v_y = (-B\,c'_1 + A\,c_1)\,\omega_1 \sin \omega_1 t - (B\,c_1 + A\,c'_1)\,\omega_1 \cos \omega_1 t +}$

$\boldsymbol{(C\,c_2 - D\,c'_2)\,\omega_2 \sin \omega_2 t - (C\,c'_2 + D\,c_2)\,\omega_2 \cos \omega_2 t}$

$\boldsymbol{v_z = \Omega\,c_3 \cos \Omega t - \Omega\,c'_3 \sin \Omega t}$

Ce sont les équations paramétriques d'une ellipse décrite en $T_1 = 2\pi/\omega_1$, dont le centre décrit une ellipse très allongée centrée sur le point de Lagrange avec une période $T_2 = 2\pi/\omega_2$

Conditions initiales : A $t = 0$, $x = x_0$, $y = y_0$, $v_x = v_{x0}$, $v_y = v_{y0}$ et $v_z = v_{z0}$ On obtient :

$$
\begin{aligned}
x_0 &= c_1 + c_2 \\
y_0 &= -A\,c_1 + B\,c'_1 - C\,c_2 + D\,c'_2 \\
v_{x0}/\omega_1 &= c'_1 + \omega_2/\omega_1\ c'_2 \\
v_{y0}/\omega_1 &= -B\,c_1 - A\,c'_1 - D\,\omega_2/\omega_1\ c_2 - C\,\omega_2/\omega_1\ c'_2
\end{aligned}
$$

Après un calcul matriciel assez fastidieux... on obtient :

$c_1 = ((BD\omega_2/\omega_1 - C^2 - D^2 + AC)\ x_0 + (A - C)\,y_0 + (BC - AD\omega_1/\omega_2)\,v_{x0}/\omega_1 + (B - D\omega_1/\omega_2)\,v_{y0}/\omega_1)/(BD\omega_2/\omega_1 - C^2 - D^2 + 2AC - A^2 - B^2 + BD\omega_1/\omega_2)$

$c'_1 = ((AD\omega_2/\omega_1 - BC)\ x_0 + (D\omega_2/\omega_1 - B)\,y_0 + (-C^2 - D^2 + AC + BD\omega_1/\omega_2)\,v_{x0}/\omega_1 + (A - C)\,v_{y0}/\omega_1)/(BD\omega_2/\omega_1 - C^2 - D^2 + 2AC - A^2 - B^2 + BD\omega_1/\omega_2)$

$c_2 = ((AC - A^2 - B^2 + BD\omega_1/\omega_2)\ x_0 + (C - A)\,y_0 + (AD\omega_1/\omega_2 - BC)\,v_{x0}/\omega_1 + (D\omega_1/\omega_2 - B)\,v_{y0}/\omega_1)/(BD\omega_2/\omega_1 - C^2 - D^2 + 2AC - A^2 - B^2 + BD\omega_1/\omega_2)$

$c'_2 = \omega_1/\omega_2\ ((BC - AD\omega_2/\omega_1)\ x_0 + (B - D\omega_2/\omega_1)\ y_0 + (BD\omega_2/\omega_1 + AC - A^2 - B^2)\ v_{x0}/\omega_1 + (C - A)\ v_{y0}/\omega_1)\ /(BD\omega_2/\omega_1 - C^2 - D^2 + 2AC - A^2 - B^2 + BD\omega_1/\omega_2)$

$c_3 = v_{z0}/\Omega$

$c'_3 = z_0$

Comme k << 1, on peut faire un développement limité en k. On obtient alors :

$\omega_1 = 1/2^{1/2}\ (1 + 1 - 27k/2)^{1/2}\ \Omega = 1/2^{1/2}\ (2 - 27k/2)^{1/2}\ \Omega = (1 - 27k/8)\ \Omega = \Omega$

$\omega_2 = 1/2^{1/2}\ (1 - 1 + 27k/2)^{1/2}\ \Omega = 1/2^{1/2}\ (27k/2)^{1/2}\ \Omega = 1/2\ (27k)^{1/2}\ \Omega = 1/2\ (27M/M_0)^{1/2}\ \Omega$

Comme k << 1, on peut négliger tous les termes contenant k (on ne garde que les termes en $k^{1/2}$). On obtient alors :

$K = 3/4\ (3)^{1/2} = 1{,}299$ $\quad$ $A = 3/13\ (3)^{1/2} = 0{,}3997$ $\quad$ $B = 8/13 = 0{,}6154$

$C = 1/(3)^{1/2} = 0{,}57735$ $\quad$ $D = 4\ (k/3)^{1/2}$

$\boldsymbol{x = c_1 \cos \Omega t + c'_1 \sin \Omega t + c_2 \cos \omega_2 t + c'_2 \sin \omega_2 t}$

$\boldsymbol{y = (8/13\ c'_1 - 3/13\ (3)^{1/2}\ c_1)\cos \Omega t - (8/13\ c_1 + 3/13\ (3)^{1/2}\ c'_1)\sin \Omega t - (1/(3)^{1/2}\ c_2 - 4\ (k/3)^{1/2}\ c'_2)\cos \omega_2 t - (1/(3)^{1/2}\ c'_2 + 4\ (k/3)^{1/2}\ c_2)\sin \omega_2 t}$

$\boldsymbol{z = c_3 \sin \Omega t + c'_3 \cos \Omega t}$

$\boldsymbol{v_x = - c_1\ \Omega \sin \Omega t + c'_1\ \Omega \cos \Omega t - c_2\ \omega_2 \sin \omega_2 t + c'_2\ \omega_2 \cos \omega_2 t}$

$\boldsymbol{v_y = (- 8/13\ c'_1 + 3/13\ (3)^{1/2}\ c_1)\ \Omega \sin \Omega t - (8/13\ c_1 + 3/13\ (3)^{1/2}\ c'_1)\ \Omega \cos \Omega t + (1/(3)^{1/2}\ c_2 - 4\ (k/3)^{1/2}\ c'_2)\ \omega_2 \sin \omega_2 t - (1/(3)^{1/2}\ c'_2 + 4\ (k/3)^{1/2}\ c_2)\ \omega_2 \cos \omega_2 t}$

$\boldsymbol{v_z = \Omega\ c_3 \cos \Omega t - \Omega\ c'_3 \sin \Omega t}$

Ce sont les équations paramétriques d'une ellipse de ½ grand axe $a_1 = ((8/13\ (3)^{1/2}\ c_1 - 4/13\ c'_1)^2 + (4/13\ c_1 + 8/13\ (3)^{1/2}\ c'_1)^2)^{1/2}$ et de ½ petit axe $b_1 = a_1/2$ inclinée de 30°, décrite en $T_1 = 2\pi/\Omega$, qui oscille avec une amplitude $a_2 = 2/(3)^{1/2}\ (c_2^2 + c'^2_2)^{1/2}$ parallèlement au grand axe autour du point de Lagrange avec une période $T_2 = 2T_1/(27M/M_0)^{1/2}$

Conditions initiales : A t = 0, $x = x_0$, $y = y_0$, $v_x = v_{x0}$, $v_y = v_{y0}$ et $v_z = v_{z0}$

$c_1 = - 3/4\ x_0 - 3/4\ (3)^{1/2}\ y_0 - 2\ v_{y0}/\Omega = - 0{,}75\ x_0 - 1{,}299\ y_0 - 2\ v_{y0}/\Omega$

$c'_1 = - 3/2\ (3)^{1/2}\ x_0 - 9/2\ y_0 + 13/4\ v_{x0}/\Omega - 3/4\ (3)^{1/2}\ v_{y0}/\Omega = - 2{,}598\ x_0 - 4{,}5\ y_0 + 3{,}25\ v_{x0}/\Omega - 1{,}299\ v_{y0}/\Omega$

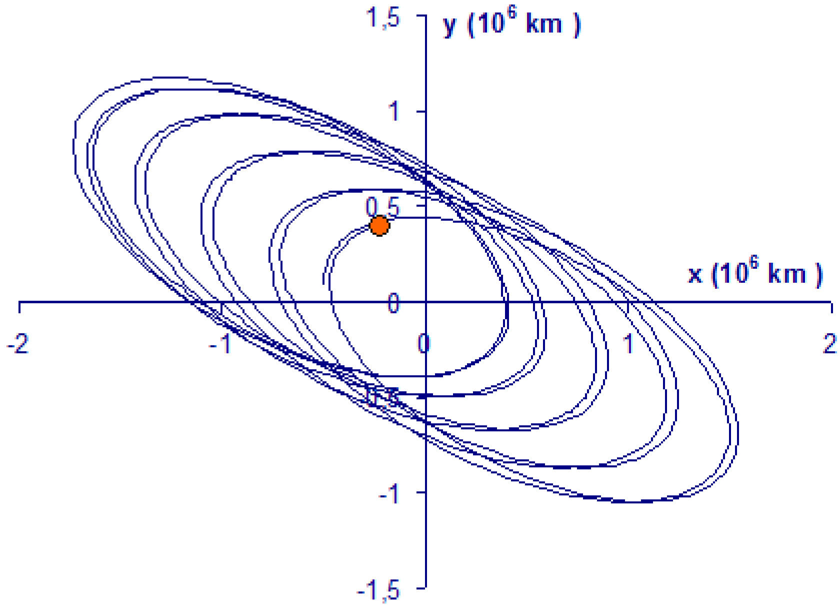
$c_2 = 7/4\ x_0 + 3/4\ (3)^{1/2}\ y_0 + 2\ v_{y0}/\Omega = 1{,}75\ x_0 + 1{,}299\ y_0 + 2\ v_{y0}/\Omega$

$c'_2 = (3(3)^{1/2}\ x_0 + 9\ y_0 - 9/2\ v_{x0}/\Omega + 3/2\ (3)^{1/2}\ v_{y0}/\Omega)/(27M/M_0)^{1/2} = (5{,}1962\ x_0 + 9\ y_0 - 4{,}5\ v_{x0}/\Omega + 2{,}5981\ v_{y0}/\Omega)/(27M/M_0)^{1/2}$

$c_3 = v_{z0}/\Omega$

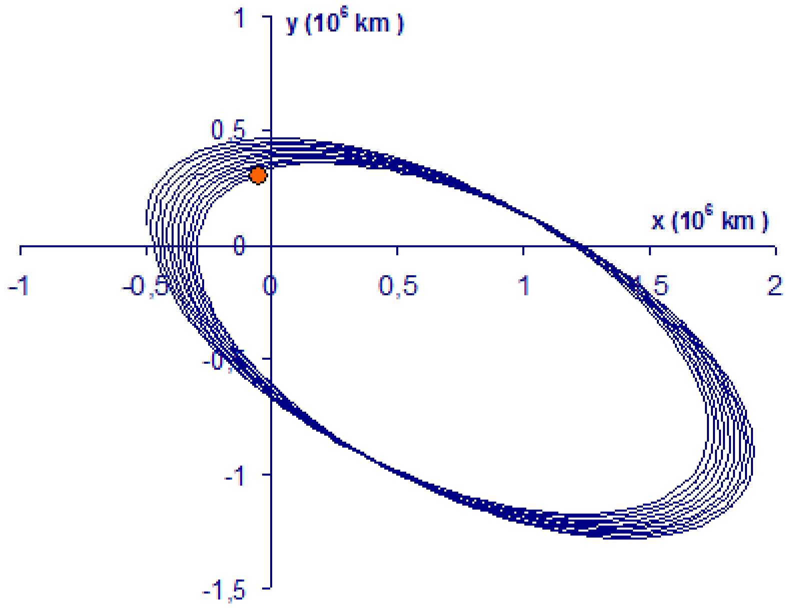
$c'_3 = z_0$

Si la masse M est inférieure à 0,04006 Mo, la masse m reste au voisinage du point de Lagrange et c'est en ce sens que les points L_4 et L_5 sont des points d'équilibre stable.



Système Soleil - Jupiter pendant 120 ans

$Mo = 2.10^{30}$ kg
$M = 2.10^{27}$ kg
$k = M/M_0 = 0,001$
$T_1 = T_{Jupiter} = 11,9$ ans
$\Omega = 1,677.10^{-8}$ rd/s
$T_2 = 145$ ans
$c_1 = - 10,8.10^5$ km
$c_2 = 5,79.10^5$ km
$x_0 = -5.10^5$ km
$y_0 = 9,23.10^4$ km
$c'_1 = 3,31.10^4$ km
$c'_2 = -3,43.10^5$ km
$v_{0x} = 0$ $v_{0y} = 11$ m/s
$c_3 = c'_3 = 0$ $v_{0z} = 0$



Système Soleil - Terre pendant 10 ans

$Mo = 2.10^{30}$ kg
$M = 6.10^{24}$ kg
$k = M/M_0 = 3.10^{-6}$
$T_1 = T_{Terre} = 1$ an
$\Omega = 1,991.10^{-7}$ rd/s
$T_2 = 222$ ans
$c_1 = - 11,1.10^5$ km
$c_2 = 6,11.10^5$ km
$x_0 = -5.10^5$ km
$y_0 = 9,23.10^4$ km
$c'_1 = -3,642.10^3$ km
$c'_2 = 8,124.10^5$ km
$v_{0x} = 0$ $v_{0y} = 136$ m/s
$c_3 = c'_3 = 0$ $v_{0z} = 0$

3.5 Mouvement au voisinage des points de Lagrange L_1 ou L_2

L'étude suivante se place dans les conditions suivantes M << Mo donc k << 1 et $x_0 = a(1 \pm (k/3)^{1/3})$ est voisin de a

On prend donc : $1 + k = 1$, $(a/(1 + k) - x_0)^2 = a^2 (k/3)^{2/3}$ et $(ka/(1 + k) + x_0)^2 = a^2$

Par exemple pour le système Soleil-Terre, $k = 3.10^{-6}$ et $|a - x_0|/a = 0{,}01$

Une masse m placée à proximité d'un point de Lagrange (en $x_0 + x$, $y_0 + y$, $z_0 + z$) subit une force résiduelle **f** telle que :

$\mathbf{f} = \mathbf{F_0} + \mathbf{\Delta F}$ avec $F_0 = 0$ (au point de Lagrange, les forces s'équilibrent exactement)

$f_x = (\delta F_x/\delta x)_0\, x + (\delta F_x/\delta y)_0\, y + (\delta F_x/\delta z)_0\, z = - (\delta^2E_p/\delta x^2)_0\, x - (\delta^2E_p/\delta x\delta y)_0\, y - (\delta^2E_p/\delta x\delta z)_0\, z$

$f_y = (\delta F_y/\delta y)_0\, y + (\delta F_y/\delta x)_0\, x + (\delta F_y/\delta z)_0\, z = - (\delta^2E_p/\delta y^2)_0\, y - (\delta^2E_p/\delta y\delta x)_0\, x - (\delta^2E_p/\delta y\delta z)_0\, z$

$f_z = (\delta F_z/\delta z)_0\, z + (\delta F_z/\delta x)_0\, x + (\delta F_z/\delta y)_0 y = - (\delta^2E_p/\delta z^2)_0\, z - (\delta^2E_p/\delta z\delta x)_0\, x - (\delta^2E_p/\delta z\delta y)_0\, y$

x, y et z << a

$\delta^2E_p/\delta x^2 = - m\Omega^2a^3 ((k(2(a/(1 + k) - x)^2 - y^2 - z^2) /((a/(1 + k) - x)^2 + y^2+ z^2)^{5/2} +$
$(2 (ka/(1 + k) + x)^2 - y^2 - z^2) /((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}) /(1 + k) + 1/a^3)$

$\delta^2E_p/\delta y^2 = - m\Omega^2a^3 ((k (2 y^2 - (a/(1 + k) - x)^2 - z^2) /((a/(1 + k) - x)^2 + y^2+ z^2)^{5/2} +$
$(2 y^2 - (ka/(1 + k) + x)^2 - z^2) /((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{5/2}) /(1 + k) + 1/a^3)$

$\delta^2E_p/\delta z^2 = - m\Omega^2a^3 (k(2 z^2 - (a/(1 + k) - x)^2 - y^2) /((a/(1 + k) - x)^2 + y^2+ z^2)^{5/2} +$
$(2 z^2 - (ka/(1 + k) + x)^2 - y^2) /((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{5/2})/(1 + k)$

$\delta^2E_p/\delta y\delta x = \delta^2E_p/\delta x\delta y = - m\Omega^2a^3 (3k (a/(1 + k) - x) y/((a/(1 + k) - x)^2 + y^2+ z^2)^{5/2} -$
$3 (ka/(1 + k) + x) y/((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{5/2})/(1 + k)$

$\delta^2E_p/\delta z\delta x = \delta^2E_p/\delta x\delta z = - m\Omega^2a^3 (3k (a/(1 + k) - x) z/((a/(1 + k) - x)^2 + y^2 + z^2)^{5/2} -$
$3 (ka/(1 + k) + x) z/((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2 + z^2)^{5/2})/(1 + k)$

$\delta^2E_p/\delta y\delta z = \delta^2E_p/\delta z\delta y = - m\Omega^2a^3 (3k\, yz/((a/(1 + k) - x)^2 + y^2 + z^2)^{5/2} +$
$3\, yz /((ka/(1 + k) + x)^2 + y^2+ z^2)^{5/2})/(1 + k)$

Au point de Lagrange, $(a/(1 + k) - x_0)^2 = a^2 (k/3)^{2/3}$, $(ka/(1 + k) + x_0)^2 = a$, $y_0 = 0$ et $z_0 = 0$

$(\delta^2E_p/\delta x^2)_0 = - 9m\Omega^2$ $(\delta^2E_p/\delta y^2)_0 = 3m\Omega^2$ $(\delta^2E_p/\delta z^2)_0 = 4m\Omega^2$

$(\delta^2E_p/\delta x\delta y)_0 = (\delta^2E_p/\delta x\delta z)_0 = (\delta^2E_p/\delta y\delta z)_0 = 0$

$f_x = 9m\Omega^2 x$

$f_y = - 3m\Omega^2 y$

$f_z = - 4m\Omega^2 z$ (f_y et fz sont des forces de rappel, mais f_x est déstabilisante. Les points L_1 et L_2 sont donc des extremums en forme de selle)

Dans le repère tournant avec la masse m, elle subit la force **f** et la force de Coriolis

$\mathbf{F_c} = 2\, m\, \mathbf{v_r} \mathbf{X}\, \mathbf{\Omega}$

La deuxième loi de Newton donne : $m\, \mathbf{a_r} = \mathbf{f} + 2\, m\, \mathbf{v_r}\, \mathbf{X}\, \mathbf{\Omega}$

(La force centrifuge est intégrée dans **f**)

Sur ox : $m\, a_x = m\, x'' = 9m\, \Omega^2 x + 2\, m\, y'\, \Omega$

Sur oy : $m\, a_y = m\, y'' = -3m\, \Omega^2 x - 2\, m\, x'\, \Omega$

Sur oz : $m\, a_z = m\, z'' = - 4m\, \Omega^2 z$

$x'' - 9\Omega^2 x - 2\, y'\, \Omega = 0$

$y'' + 3\Omega^2 y + 2\, x'\, \Omega = 0$

$z'' + 4\Omega^2 z = 0$ dont la solution est $z = c_3 \sin 2\Omega t + c'_3 \cos 2\Omega t$

On teste $x = c\,e^{\omega t}$ et $y = d\,e^{\omega t}$

$\omega^2 c - 9\Omega^2 c - 2\omega\Omega d = 0$

$\omega^2 d + 3\Omega^2 d + 2\omega\Omega c = 0$

Ces deux relations sont vraies si :

$(\omega^2 - 9\Omega^2)(\omega^2 + 3\Omega^2) + 4\omega^2\Omega^2 = 0$

$\omega^4 - 2\Omega^2\omega^2 - 27\Omega^4 = 0$ donc les solutions sont :

$\omega^2 = \Omega^2 \pm (\Omega^4 + 27\Omega^4)^{1/2} = \Omega^2(1 \pm (28)^{1/2})$

$\omega = \pm\Omega(1 \pm (28)^{1/2})^{1/2}$

$\boldsymbol{\omega_1 = \pm\Omega(2(7)^{1/2} + 1)^{1/2}} = \pm 2{,}5083\ \Omega$ est réel

$\boldsymbol{\omega_2 = \pm j\,\Omega(2(7)^{1/2} - 1)^{1/2}} = \pm j\ 2{,}0716\ \Omega$ est imaginaire pur, on pose $\boldsymbol{\omega_2 = \pm j\,\omega_2}$

$x = c_1\,e^{\omega 1t} + c'_1\,e^{-\omega 1t} + c_2\,e^{j\omega 2t} + \mathbf{c'_2}\,e^{-j\omega 2t}$

$y = d_1\,e^{\omega 1t} + d'_1\,e^{-\omega 1t} + d_2\,e^{j\omega 2t} + d'_2\,e^{-j\omega 2t}$

On prend les parties réelles de x et y et on choisit c_1, c'_1, c_2 réels et $\mathbf{c'_2}$ imaginaire pur ($\mathbf{c'_2} = j\,c'_2$) pour obtenir la solution générale.

$d_1 = (\omega_1^2 - 9\Omega^2)/2\omega_1\Omega\ c_1 = ((7)^{1/2} - 4)/(2(7)^{1/2} + 1)^{1/2} = -0{,}5399\ c_1$

$d'_1 = -(\omega_1^2 - 9\Omega^2)/2\omega_1\Omega\ c'_1 = ((7)^{1/2} - 4)/(2(7)^{1/2} + 1)^{1/2} = 0{,}5399\ c'_1$

$d_2 = -j\,(-\omega_2^2 - 9\Omega^2)/2\omega_2\Omega\ c_2 = -j\,(-(7)^{1/2} - 4)/(2(7)^{1/2} - 1)^{1/2} = j\ 3{,}208\ c_2$

$d'_2 = j\,(-\omega_2^2 - 9\Omega^2)/2\omega_2\Omega\ j\,c'_2 = -(-(7)^{1/2} - 4)/(2(7)^{1/2} - 1)^{1/2} = 3{,}208\ c'_2$

$\boldsymbol{x = c_1\,e^{2,5083\Omega t} + c'_1\,e^{-2,5083\,\Omega t} + c_2\cos(2{,}0716\,\Omega t) + c'_2\sin(2{,}0716\,\Omega t)}$

$\boldsymbol{y = -\,0{,}5399\,c_1\,e^{2,5083\,\Omega t} + 0{,}5399\,c'_1\,e^{-2,5083\,\Omega t} - 3{,}208\,c_2\sin(2{,}0716\,\Omega t) + 3{,}208\,c'_2\cos(2{,}0716\,\Omega t)}$

$\boldsymbol{z = c_3\sin(2\Omega t) + c'_3\cos(2\Omega t)}$

$\boldsymbol{v_x = 2{,}5083\,\Omega\,c_1\,e^{2,5083\,\Omega t} - 2{,}5083\,\Omega\,c'_1\,e^{-2,5083\,\Omega t} - 2{,}0716\,\Omega\,c_2\sin(2{,}0716\,\Omega t) + 2{,}0716\,\Omega\,c'_2\cos(2{,}0716\,\Omega t)}$

$\boldsymbol{v_y = -\,1{,}354\,\Omega\,c_1\,e^{2,5083\,\Omega t} - 1{,}354\,\Omega\,c'_1\,e^{-2,5083\,\Omega t} - 6{,}646\,\Omega\,c_2\cos(2{,}0716\,\Omega t) - 6{,}646\,\Omega\,c'_2\sin(2{,}0716\,\Omega t)}$

$\boldsymbol{v_z = 2\Omega\,c_3\cos(2\Omega t) - 2\Omega\,c'_3\sin(2\Omega t)}$

Le premier terme étant divergent, la masse m s'éloigne inexorablement du point de Lagrange donc on a une position instable.

Pour le système Soleil-Terre, la constante de temps τ de l'exponentielle est $\tau = 1/\omega_1 = 23$ jours et la période de rotation est $T = 2\pi/\omega_2 = 176$ jours

Remarque : On pourrait penser qu'en choisissant très soigneusement les conditions initiales pour que $c_1 = 0$, on aurait une trajectoire elliptique (le deuxième terme disparaissant rapidement) et la masse m resterait au voisinage du point, mais il est impossible d'avoir c_1 exactement nul et le moindre écart s'amplifie rapidement. Et même si c_1 était nul, la moindre perturbation due aux planètes voisines ferait sortir la masse de son orbite elliptique.

Il faut tout de même que c_1 soit faible ($|c_1| < r_0/200$).

Les points L_1 et L_2 sont des positions instables.

Conditions initiales : A t = 0, $x = x_0$, $y = y_0$, $v_x = v_{0x}$, $v_y = v_{0y}$ et $v_z = v_{0z}$

On obtient :

$c_1 = 0{,}628\ x_0 - 0{,}113\ y_0 + 0{,}175\ v_{0x}/\Omega + 0{,}0945\ v_{0y}/\Omega$

$c'_1 = 0{,}628\ x_0 + 0{,}113\ y_0 - 0{,}175\ v_{0x}/\Omega + 0{,}0945\ v_{0y}/\Omega$

$c_2 = - 0{,}256\ x_0 - 0{,}189\ v_{0y}/\Omega$

$c'_2 = 0{,}2737\ y_0 + 0{,}0589\ v_{0x}/\Omega$

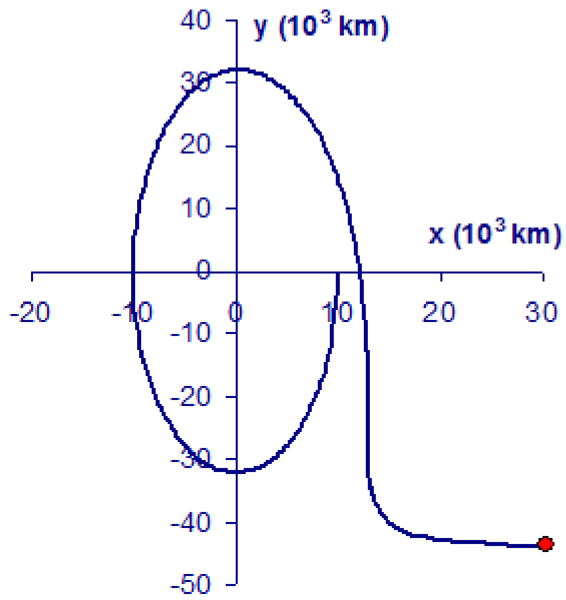
$c_3 = v_{z0}/(2\Omega)$

$c'_3 = z_0$

Système Soleil - Terre

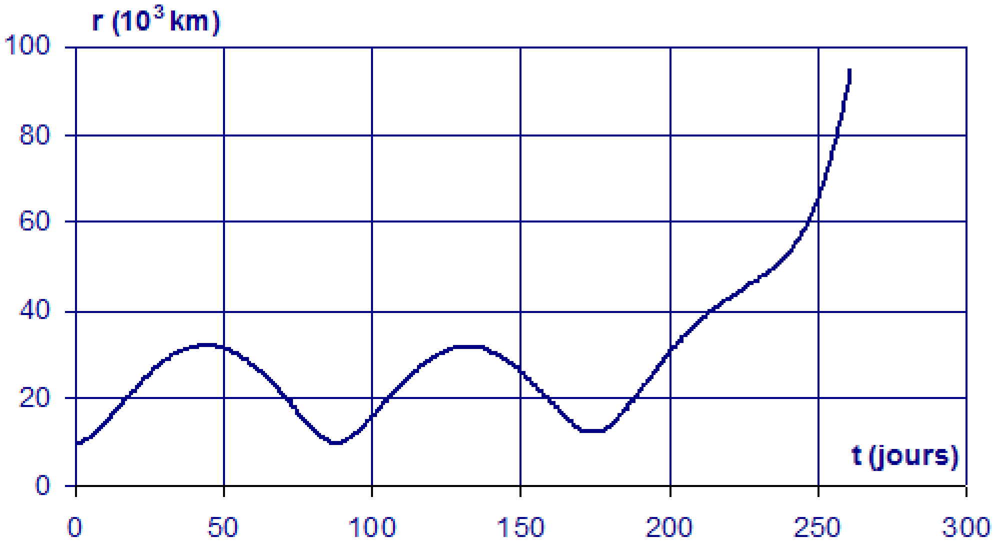
Conditions initiales : x_0 = 10000 km, $y_0 = 0$ et v_0 = 13,238 m/s perpendiculaire à Ox

$c_1 = c'_1 = 1{,}138$ km $\qquad$ $c_2 = 9998$ km $\qquad$ $c'_2 = 0$



Le graphe y = f(x) représente la trajectoire d'un satellite au voisinage du point de Lagrange L_1 ou L_2 du système Soleil-Terre qui est situé à 1,5 million de km de la Terre.

On voit qu'il peut rester quelque temps autour mais il finit par s'en éloigner définitivement. Pour que le satellite reste quelque temps au voisinage du point de Lagrange, il faut que la vitesse initiale soit bien ajustée : 13,1 m/s $< v_0 <$ 13,25 m/s



Le graphe r = f(t) représente la distance d'éloignement en fonction du temps, d'un satellite placé à 10000 km du point de Lagrange L_1 ou L_2 du système Soleil-Terre.

On voit qu'il reste un certain temps au voisinage du point de Lagrange, il faut plus de 150 jours pour qu'il commence à s'éloigner.

C'est l'intérêt de ce point : Bien que le satellite soit instable, il n'y a pas besoin de le repositionner très souvent.