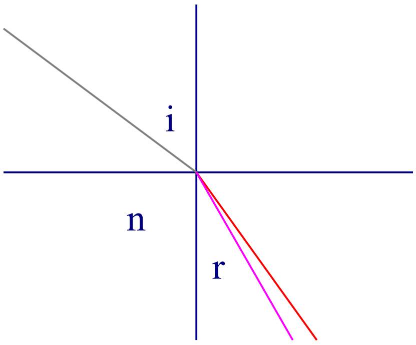
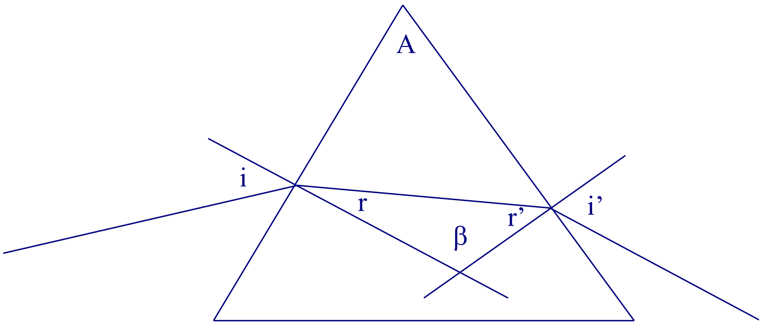
La dispersion par un prisme

par Gilbert Gastebois

1. Schémas





L'indice n du milieu transparent est égal au rapport de la vitesse de la lumière dans le vide et de la vitesse v de la lumière dans le milieu.
$n = c/v$.   v dépend de la longueur d'onde, donc n dépend de la longueur d'onde.

$n = a + b/\lambda^2$ est un bon modèle de l'évolution de l'indice pour l'intervalle du visible.

Le pouvoir dispersif d'un verre est donné par son indice d'Abbe ou constringence défini par

$V = (n_{589} - 1)/(n_{486} - n_{656}) = (a + b/(589)^2 - 1)/(b/(486)^2 - b/(656)^2)$

$V = 1{,}51 + 5{,}23.10^5\,(a - 1)/b \simeq 5{,}23.10^5\,(a - 1)/b$ car $V >> 1{,}51$

Plus V est faible et plus le verre est dispersif

Loi de Snell-Descartes : **$\sin i = n \sin r$**

2. Le prisme

2.1 angle de sortie du rayon

$\sin i = n \sin r$
$\beta = 360 - 2\text{x}90 - A = 180 - A$
$r + r' + \beta = 180 \Rightarrow r + r' = 180 - \beta = A$
$r' = A - r$
$\sin i' = n \sin r'$

2.2 angle de déviation D

$D = i - r + (i' - r') = i + i' - A$

$\mathbf{D = i + i' - A}$

D passe par un minimum D_m quand $r = r'$ donc quand $i = i'$

$r = r' = A/2 \Rightarrow \sin i_m = \sin i'_m = n \sin (A/2)$

$D = D_m$ si $i_m = i'_m = \text{asin}(n \sin (A/2))$

$\mathbf{D_m = 2\,i_m - A}$

3. Dispersion de la lumière par un prisme à la déviation minimum

$i_m = \text{asin}(n \sin A/2) = \text{asin}((a + b/\lambda^2) \sin (A/2))$ pour $\lambda = 541$ nm

L'ouverture du faisceau de sortie est donc

$\theta = i'(\lambda_m) - i'(\lambda_M)$

$\lambda_m = 400$ nm et $\lambda_M = 750$ nm

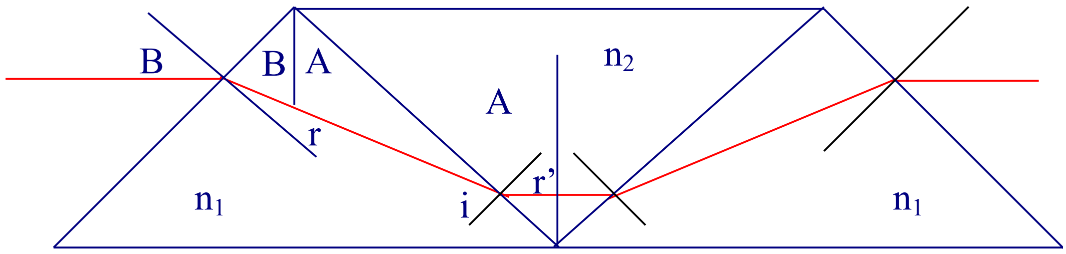
Exemple : Prisme d'angle $A = 60°$ en verre Flint dense : $n = 1{,}68 + 13540/\lambda^2$ $V = 28$

On obtient $\theta = 7{,}1°$ pour $i = i_m = 59{,}7°$ et $D = 59{,}4°$

On obtient une ouverture plus grande si on augmente la déviation.

4. Dispersion de la lumière par un prisme à vision directe

4.1 Schéma



4.2 Calcul de l'angle B

Pour avoir une vision directe, il faut que la lumière ressorte parallèlement au rayon rentrant.

Par symétrie, il faut donc que le rayon traversant le prisme central soit parallèle au rayon rentrant.

Il faut donc que $r' = A$, ce qui entraine $\sin i = n_2 \sin A/n_1$

D'autre part, $90 - i = 180 – A – B – (90 – r) = 90 – A – B + r$

donc $i = A + B – r$ et $\sin B = n_1 \sin r$

$\sin B = n_1 \sin(A + B – \text{asin} (n_2 \sin A/n_1))$

On pose $C = A - \text{asin} (n_2 \sin A/n_1)$, on a alors $\sin B = n_1 \sin B \cos C + n_1 \cos B \sin C$

$\sin B = n_1 \sin B \cos C + n_1 (1 - \sin^2 B) \sin C$. En réarrangeant l'équation, on obtient :

$\mathbf{\sin B = |n_1 \sin C/(1 + n_1^2 - 2 n_1 \cos C)^{1/2}|}$

Exemple : Pour $A = 55°$ et pour $\lambda = 541$ nm ($n_1 =1{,}489$, $n_2 = 1{,}726$ et $C = -16{,}72°$)

on obtient $B = 45°$. La raie verte du mercure n'est donc pas déviée par ce prisme.

4.3 Ouverture du faisceau

Exemple : Prismes d'angles $A = 55°$ en verre Flint dense : $n = 1{,}68 + 13540/\lambda^2$ $V = 28$

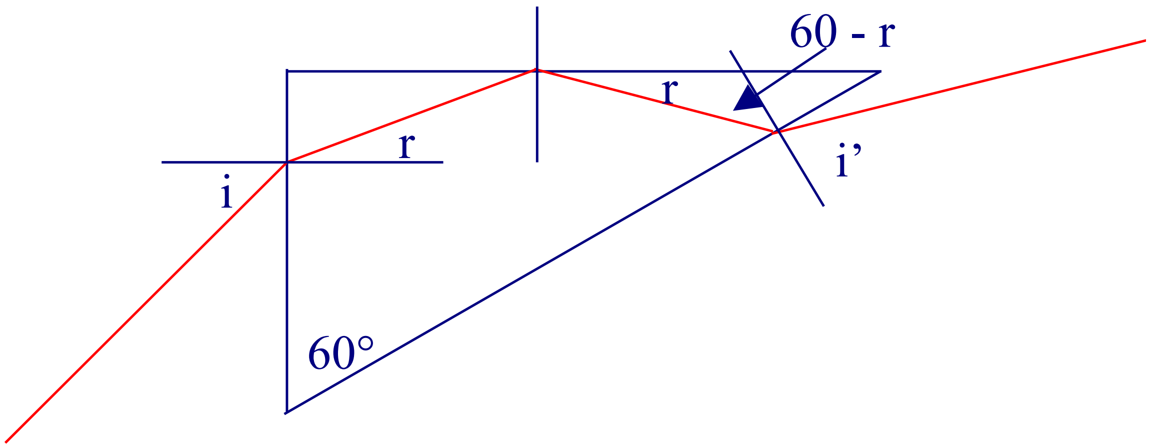
et $B = 45°$ en verre Crown : $n = 1{,}48 + 3620/\lambda^2$ $V = 71$

On obtient $\theta = 14{,}4°$ ce qui est le double du prisme simple.

C'est l'intérêt du prisme à vision directe, il ne dévie pas le faisceau et il est nettement plus dispersif.

5. Dispersion de la lumière par un prisme d'Abbe

5.1 Schéma



5.2 Déviation du faisceau

$\sin i' = n \sin (60 - r)$ et $\sin i = n \sin r$

$D = i - r + 2r - (i' - (60 - r)) = i - r + 2r - i' + 60 - r = 60 + i - i'$

$\mathbf{D = 60 + i - i'}$

On cherche à avoir i voisin de i' ce qui donne D voisin de 60° et donc r voisin de 30°

Exemple : Prisme en verre Flint dense : $n = 1{,}68 + 13540/\lambda^2$ $V = 28$

On obtient $D = 60°$ pour $\lambda = 541$ nm si $i = i' = 59{,}7°$

5.3 Ouverture du faisceau pour D = 60°

$\theta = i'(\lambda_m) - i'(\lambda_M)$

$\sin i' = n \sin (60 - r)$ et $\sin i = n \sin r$

$\sin i' = n \sin 60 \cos r - n \cos 60 \sin r = n\,(0{,}75(1 - \sin^2 i/n^2))^{1/2} - 0{,}5 \sin i$

Exemple : Prisme en verre Flint dense : $n = 1{,}68 + 13540/\lambda^2$ $V = 28$

On obtient $\theta = 7{,}1°$

Le résultat est identique à ce que l'on aurait en utilisant l'angle de 60° à la déviation minimum pour disperser la lumière. Alors quel est l'intérêt du dispositif?

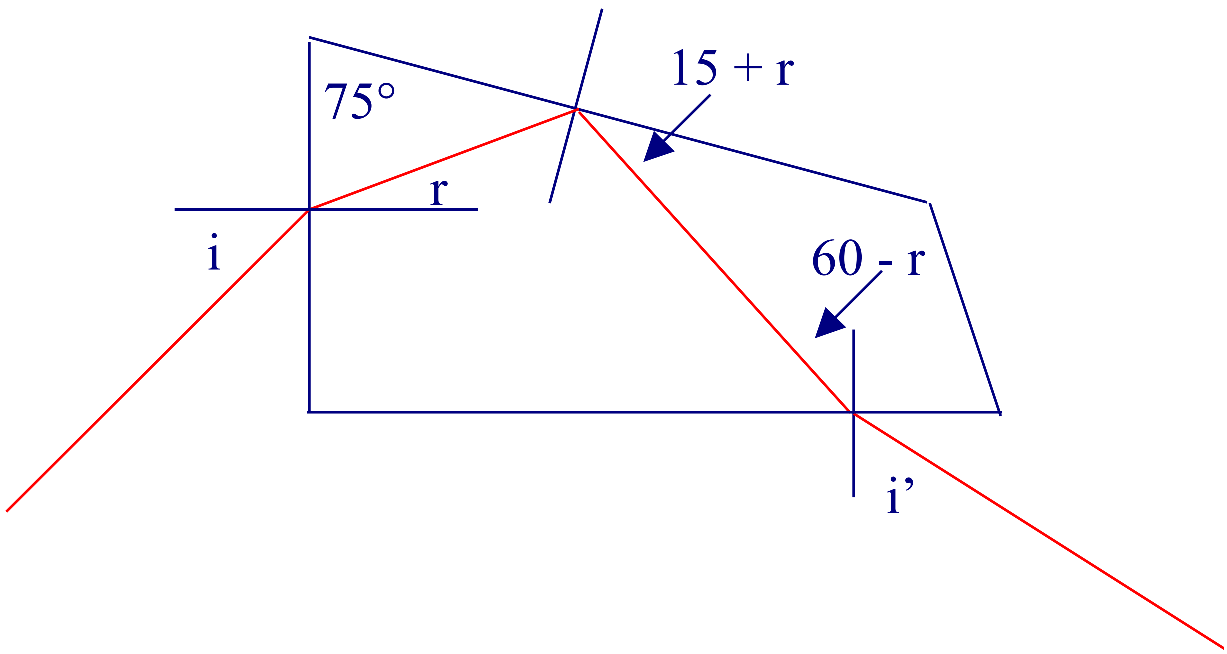
C'est qu'on obtient une augmentation de l'ouverture en diminuant la déviation et non en l'augmentant comme avec la dispersion simple.

Dans les deux cas on peut aller jusqu'à une ouverture de 14,3°.

La déviation moyenne du faisceau sera de 37° avec le dispositif d'Abbe et de 63° avec le prisme simple.

6. Monochromateur de Pellin-Broca

6.1 Schéma



6.2 Déviation du rayon sélectionné

$\sin i' = n \sin(60 - r)$ et $\sin i = n \sin r$

$D = i - r + 2(15 + r) - (i' - (60 - r)) = i - r + 30 + 2r - i' + 60 - r = 90 + i - i'$

$\mathbf{D = 90 + i - i'}$

On sélectionne le rayon pour lequel $i = i'$, ce qui donne $D = 90°$ et donc $r = 30°$

$\sin i = n \sin 30 = n/2 = (a + b/\lambda^2)/2$

$\boldsymbol{\lambda = (b/(2 \sin i - a))^{1/2}}$

Exemple : Prisme en verre Flint dense : $n = 1{,}68 + 13540/\lambda^2$ $V = 28$

On obtient :

$\lambda = 628$ nm si $i = 59°$

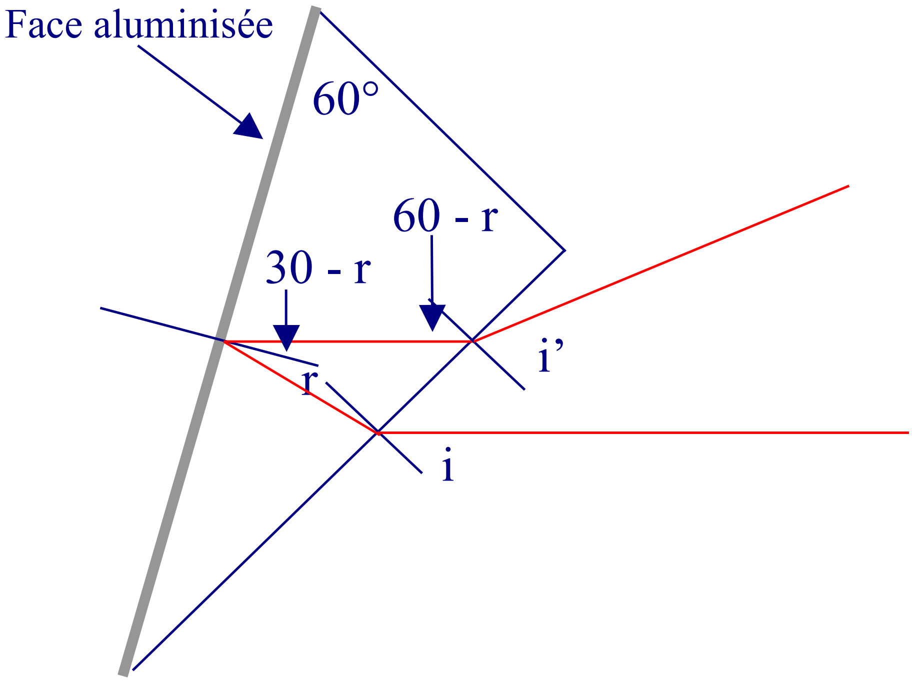
$\lambda = 510$ nm si $i = 60°$

$\lambda = 442$ nm si $i = 61°$

L'instrument est donc très sensible à l'orientation.

7. Monochromateur de Littrow

7.1 Schéma



7.2 Déviation du rayon sélectionné

sin i' = n sin (60 - r) et sin i = n sin r

D = i – r + 180 - 2 (30 - r) - (i'-(60 – r)) = i – r + 120 + 2 r – i' + 60 – r = 180 + i – i'

D = 180 + i – i'

On sélectionne le rayon pour lequel i = i' , ce qui donne D = 180° et donc r = 30°

Le rayon revient sur lui-même.

sin i = n sin 30 = n/2 = (a + b/λ^2)/2

$\boldsymbol{\lambda = (b/(2 \sin i - a))^{1/2}}$

Exemple : Prisme en verre Flint dense : n = 1,68 + 13540/λ^2 V = 28

On obtient :

λ = 628 nm si i = 59°

λ = 510 nm si i = 60°

λ = 442 nm si i = 61°

L'instrument est donc très sensible à l'orientation.